QUADRATISCHE FUNKTIONEN

(Funktionen des 2^e Grades)

I. Einführung:

Allgemeine Funktionsgleichung: $\boxed{y = ax^2 + px + q}$

Aufgabe 2[1] (Westermann EK, S.14)

II. Terminologie:

a.) Abhängige Variable (erklärte Variable)

= der Wert der abhängigen Variable wird anhand von unabhängigen (gegebenen) Variablen ermittelt

b.) Unabhängige Variable (erklärende Variable)

= der Wert der unabhängigen Variable ist gegeben (oder wurde vorher ermittelt)

Beispiele:

- Flächeninhalt eines Quadrates: Fläche = (Seitenlänge)^2

$$A = a^2$$

A = abhängige Variable
a = unabhängige Variable

- y = ax + b → y ist abhängig vom Wert von x;
  y ist eine Funktion von x → Schreibweise: f(x)

Ermittele andere Beispiele

---

[1] a)

x	−4	−3,5	−3	−2,5	−2	−1,5	−1
f(x)	16	12,25	9	6,25	4	2,25	1

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
f(x)	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16

b) f(4) = f(−4); f(3,5) = f(−3,5); f(2,5) = f(−2,5)
Die Funktionswerte sind bei negativen und positiven x-Werten gleich groß.

c.) Scheitelpunkt und Symmetrieachse

Eine quadratische Funktionsgleichung wird als ______________ dargestellt.

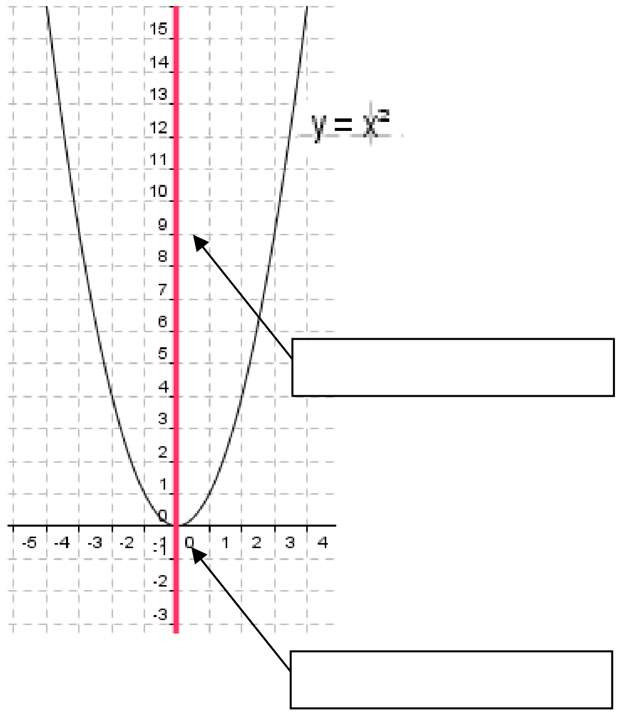
Beispiel: Funktionsgleichung: $y = x^2$
x = 1 und x = -1 → y = 1
x = 2 und x = -2 → y = 4

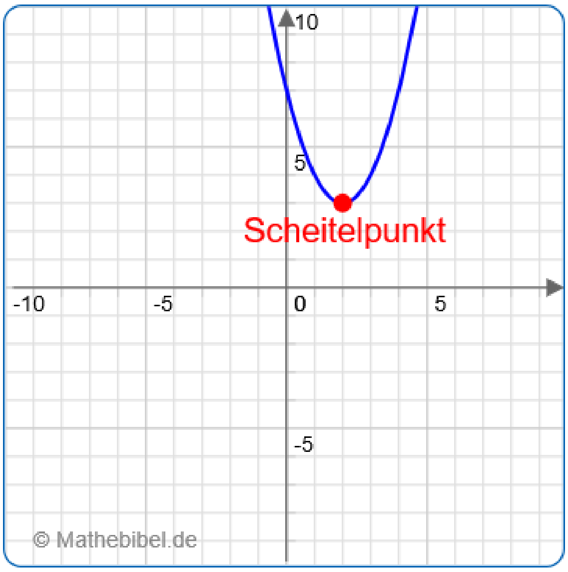
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y=x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y=x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Die entgegengesetzten x-Werte ergeben identische y-Werte.

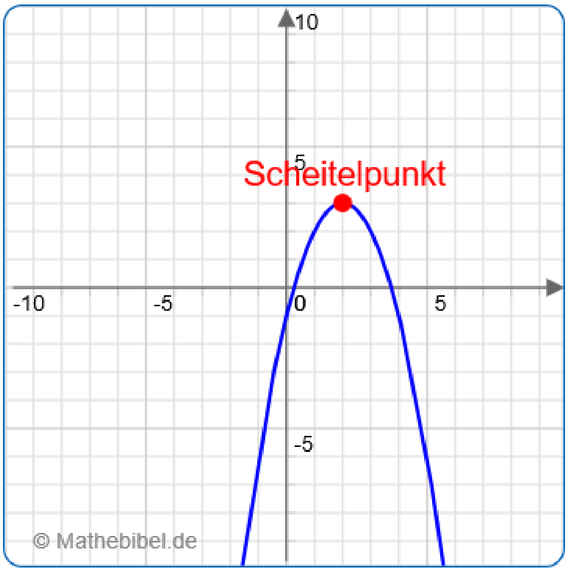
Die y-Achse stellt eine **<u>Symmetrie-Achse</u>** dar.





Ist die Parabel nach oben geöffnet, so ist der Scheitelpunkt der **tiefste Punkt** der Funktion.

Statt vom tiefsten Punkt spricht man auch vom **Minimum** der Funktion.



Ist die Parabel nach unten geöffnet, so ist der Scheitelpunkt der **höchste Punkt** der Funktion.

Statt vom höchsten Punkt spricht man auch vom **Maximum** der Funktion.

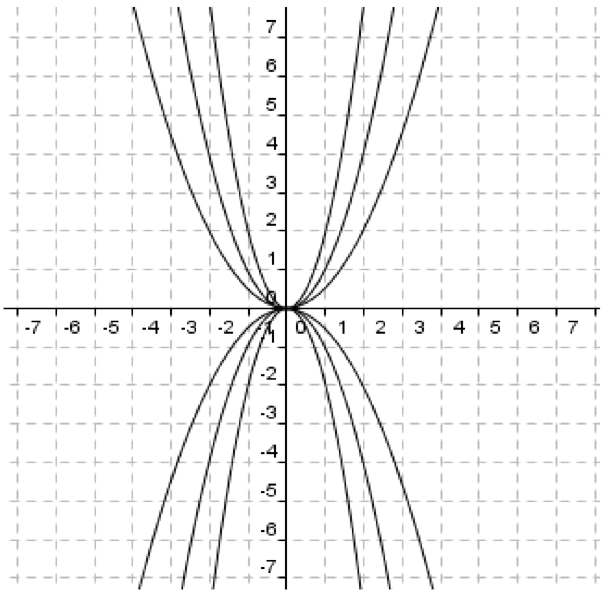
III. Graphische Darstellung von $y = ax^2$ **p= __ q =__**

Beispiel : $y_1 = x^2$ $y_2 = -x^2$ $y_3 = 2x^2$ $y_4 = -2x^2$ $y_5 = 0{,}5x^2$ $y_6 = -0{,}5x^2$

- Wertetabelle :

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y=x^2									
y=-x^2									
y= 2x^2									
y = -2x^2									
y = 0,5x^2									
y= -0,5x^2									

- Erkennen der verschiedenen Funktionsgleichungen:



- **Schlussfolgerungen:**

Wenn a > 0: Die Parabel ist nach _________ geöffnet. Sie ist _________ nach oben.

Wenn a < 0: Die Parabel ist nach __________ geöffnet. Sie ist __________ nach unten.

Die Öffnung der Parabel ist KLEINER desto ____________ der _______________ von „a“ ist.

Die Öffnung der Parabel ist GRÖSSER desto ___________ der _______________ von „a“ ist.

Aufgabe 1 (Westermann EK, S.23)

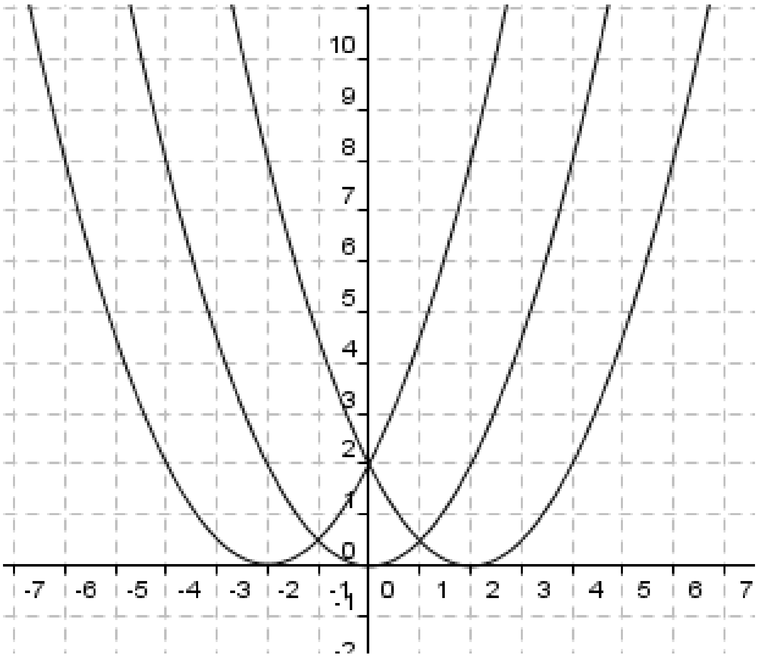
IV. Graphische Darstellung von $y = a(x + \alpha)^2$

Beispiel : $y_1 = \frac{1}{2}x^2$ $y_2 = \frac{1}{2}(x + 2)^2$ $y_3 = \frac{1}{2}(x - 2)^2$

- Wertetabelle :

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y1 = 0,5x^2	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8
y2 = 0,5(x+2)^2	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	13	18
y3 = 0,5(x-2)^2	18	13	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2

- Erkennen der verschiedenen Funktionsgleichungen:



Im Vergleich zu $y_1 = \frac{1}{2}x^2$ verschieben sich $y_2 = \frac{1}{2}(x + 2)^2$ und $y_3 = \frac{1}{2}(x - 2)^2$ um 2 Einheiten links oder rechts auf der x-Achse.

Die Verschiebungen sind:

- **-2** für die Parabel $y_2 = \frac{1}{2}(x \mathbf{+ 2})^2$
- **+2** für die Parable $y_3 = \frac{1}{2}(x \mathbf{- 2})^2$

Die SYMMETRIE-ACHSE sowie der SCHEITELPUNKT verschieben sich um 2 Einheiten nach links oder rechts.

Aufgabe 4 (Westermann EK, S.18)

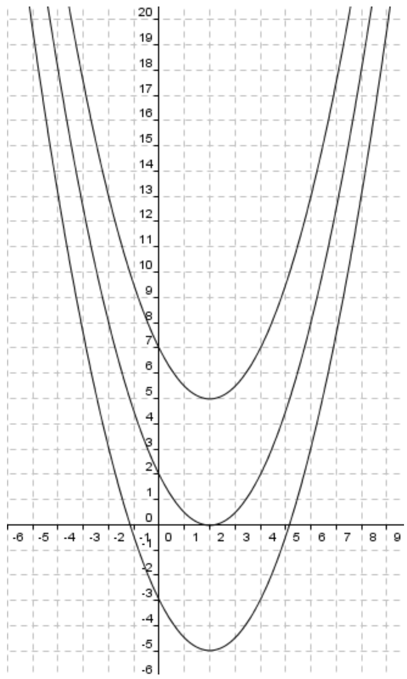
V. Graphische Darstellung von $y = a(x + \alpha)^2 + \beta$

Beispiel : $y_1 = \frac{1}{2}(x - 2)^2$ $\quad$ $y_2 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 5$ $\quad$ $y_3 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 5$

- Wertetabelle :

	-4	-3	-2	-1	0	2	3	4
y1 = 0,5(x - 2)^2	18	12,5	8	4,5	2	0	0,5	2
y2 = 0,5(x - 2)^2 + 5	23	17,5	13	9,5	7	5	5,5	7
y3 = 0,5(x - 2)^2 - 5	13	7,5	3	-0,5	-3	-5	-4,5	-3

- Erkennen der verschiedenen Funktionsgleichungen:



Im Vergleich zu $y_1 = \frac{1}{2}(x - 2)^2$ verschieben sich $y_2 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 5$ und $y_2 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 5$ um 5 Einheiten nach oben oder nach unten auf der y-Achse.

Die Verschiebungen sind:

- **+5** für die Parabel $y_2 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 5$
- **-5** für die Parabel $y_3 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 5$

Die SYMMETRIE-ACHSE bleibt unverändert.

Der SCHEITELPUNKT verschiebt sich um 5 Einheiten nach oben oder nach unten.

Aufgabe 1: Gebe den Scheitelpunkt der Funktionen an!

a.) $y = x^2$ c.) $(x - 3)^2 + 1$

b.) $y = x^2 - 3$ d.) $y = (x + 4)^2$

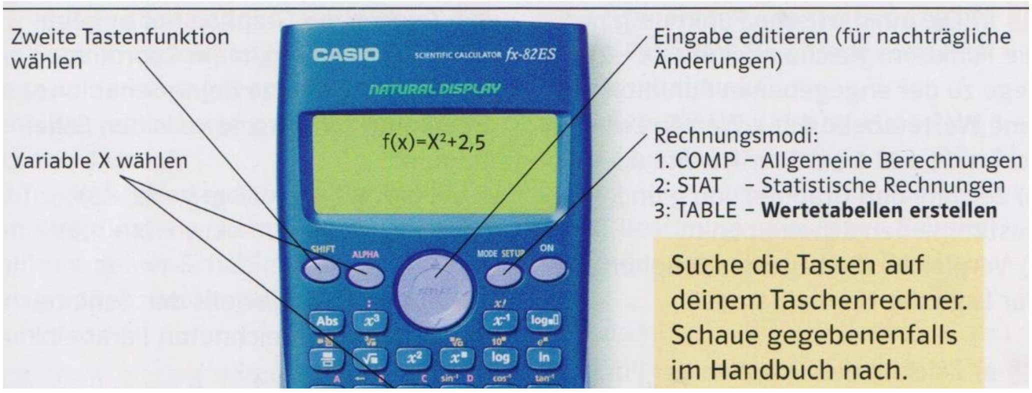
Aufgabe 2: Ermittele anhand ihres jeweiligen Scheitelpunktes die Funktionsgleichungen folgender Normalparabeln:

a.) S(0; 4) c.) S(-3; -2)

b.) S(3; 0) d.) S(7; -1)

Aufgabe 3 (Westermann EK, S.19)
Aufgabe 4 (Westermann EK, S.19) (→ Normalparabeln a = 1)
Aufgabe 3 (Westermann EK, S.20) (→ Normalparabeln a = 1)

TIPP !!! Aufstellen einer Wertetabelle (Westermann EK, S.17)



So kannst du für die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2 + 2{,}5$ eine Wertetabelle erstellen:

Schritt	Tastenfolge	TR-Anzeige
1. Wähle den Modus 3.	MODE 3	f(X) =
2. Gib den Funktionsterm ein.	ALPHA [)] [x²] [+] 2.5 [=]	Start?
3. Gib den kleinsten x-Wert ein.	−4 [=]	End?
4. Gib den größten x-Wert ein.	4 [=]	Step?
5. Gib die Schrittweite ein.	0.5 [=]	| X | F (X) 1 | −4 | 18.5 2 | −3,5 | 14.75 3 | −3 | 11.5
6. Bewege den Cursor nach unten, um alle Werte ablesen zu können.		| X | F (X) 15 | 3 | 11.5 16 | 3.5 | 14.75 17 | 4 | 18.5

VI. Umwandeln der Funktionsgleichung in die Scheitelpunktfunktion

Um die Koordinaten des Scheitelpunktes direkt festzustellen, müssen wir den Ausdruck $\underline{y = ax^2 + px + q}$ in den Ausdruck $\underline{y = a(x + \alpha)^2 + \beta}$ umzuwandeln.

Beispiel:

$y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 8$ Ausklammern von $\frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{4}\underbrace{(\mathbf{x^2 - 8x} + 32)}$ Herstellen einer binomischen mit $\mathbf{x^2 - 8x}$

$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

$\mathbf{a^2 = x^2 \rightarrow a = x}$

$\mathbf{2ab = -8x \rightarrow b = -4}$

$\mathbf{b^2 = (-4)^2 = 16}$

$$\boxed{\mathbf{(x^2 - 8x + \underbrace{16) + 16}_{32}}}$$

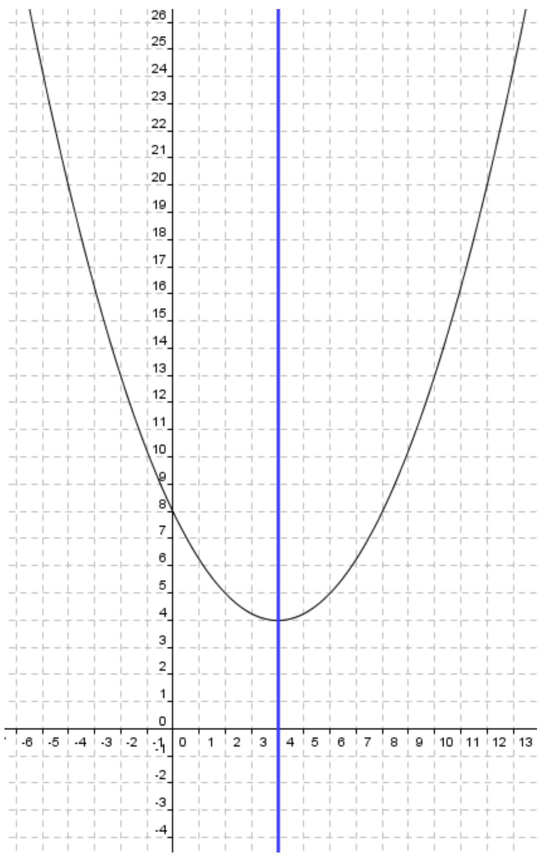
$y = \frac{1}{4}\,[(\mathbf{x2} - \mathbf{8x} + \mathbf{16}) + \mathbf{16}]$

$y = \frac{1}{4}\,[(x - 4)^2 + 16]$

$y = \frac{1}{4}\,(x - 4)^2 + 4$

Scheitelpunkt: S(4; 4)

Symmetrie-Achse: x = 4



Aufgabe 3:

a) Wandele die Gleichung $y = 3x^2 + 2x - 5$ in Form $\underline{y = a(x + \alpha)^2 + \beta}$ um.
b) Skizziere die Parabel anhand der Scheitelpunktkoordinaten!

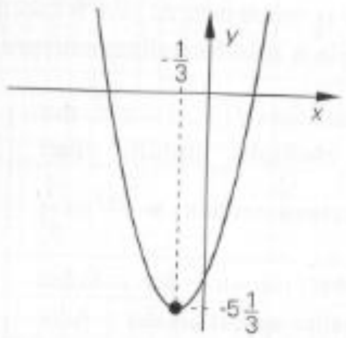
Lösungsweg:

1. $y = 3\left[x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\right]$

2. $y = 3\left[\underbrace{x^2 + \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{5}{3}\right]$ ▶ $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

3. $y = 3\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{15}{9}\right]$

$y = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - 5\frac{1}{3}$ ▶ Scheitelpunktsgleichung



Aufgabe 4[2]:
Wandele folgende Gleichungen in Form $\underline{y = a(x + \alpha)^2 + \beta}$ um:

a.) $y = x^2 + 2x + 3$

b.) $y = x^2 - 6x + 8$

c.) $y = x^2 - 4x + 9$

d.) $y = x^2 + 6x + 4$

e.) $y = x^2 - 8x + 9$

f.) $y = x^2 + 12x - 9$

---

[2] *Lösungen:*

a.) $y = (x+1)^2 + 2$	S(-1; 2)
b.) $y = (x - 3)^2 - 1$	S(3; -1)
c.) $y = (x - 2)^2 + 5$	S(2; 5)
d.) $y = (x + 3)^2 - 5$	S(-3; -5)
e.) $y = (x - 4)^2 - 7$	S(4; -7)
f.) $y = (x + 6)^2 - 45$	S(-6; -45)

VII. Ermitteln der Scheitelpunktfunktion anhand einer Formel

Den Scheitelpunkt berechnet man am einfachsten mit der Formel

$x_S = -\frac{p}{2a}$

$y_S = p(x)$ ← Wir setzen den Wert von x_S in die Funktionsgleichung ein!

Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 4x + 8$

$a = 2 \qquad p = -4 \qquad q = 8$

$x_S = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = \frac{-(-4)}{4} = 1$

$y_S = 2 \cdot \mathbf{1}^2 - 4 \cdot \mathbf{1} + 8 = 2 - 4 + 8 = 6$

S(1 / 6)

Aufgabe 5[3]:

Ermittele die Scheitelpunktekoordinaten folgender Funktionsgleichungen:

a) $f(x) = x^2 + 10x + 15$
b) $f(x) = x^2 - 14x - 21$
c) $f(x) = 3x^2 + 24x + 6$
d) $f(x) = -x^2 + 5x + 2$
e) $f(x) = x^2 + 8x + 7$
f) $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 0{,}5$
g) $f(x) = 2x^2 + 12x + 10$
h) $f(x) = 3x^2 - 54x - 189$
i) $f(x) = -4x^2 + 12x + 16$

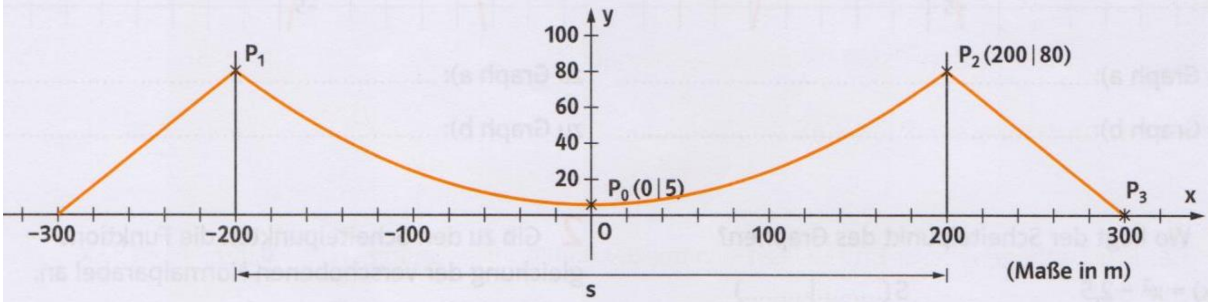
Du kannst Deine Lösungen auch auf:
http://www.fos-mathetrainer.de/11-klasse/quadratische-funktionen/parabelrechner/
überprüfen

[3] Lösung:

a) S (-5 / -10) $f(x) = (x + 5)^2 - 10$
b) S (7 / -70) $f(x) = (x - 7)^2 - 70$
c) S (-4 / -42) $f(x) = 3(x + 4)^2 - 42$
d) S (2,5 / 8,25) $f(x) = -(x - 2{,}5)^2 + 8{,}25$
e) S (-4 / -9) $f(x) = (x + 2)^2 - 5$
f) S (3 / + 4) $f(x) = -0{,}5(x - 3)^2 + 4$
g) S (-3 / -8) $f(x) = 2(x + 3)^2 - 8$
h) S (9 / -432) $f(x) = 3(x - 9)^2 - 432$
i) S(1,5 / 25) $f(x) = -4(x - 1{,}5)^2 + 25$

Aufgabe 6[4]:

Das Stahlseil hängt parabelförmig zwischen den Brückenpfeilern.



a) Wie hoch hängt das Stahlseil an seiner tiefsten Stelle über der Fahrbahn? .... m

b) Wie viele Meter beträgt der Abstand s zwischen den beiden Pfeilern? .... m

c) Der Punkt P_2 hat die Koordinaten $P_2(200|80)$. Gib die Koordinaten von P_1 an. P_1(...........|...........)

d) Welche der Funktionsgleichungen gehört zu der Parabel, die den Verlauf des Stahlseils beschreibt?

A: $f(x) = -0{,}001875 \cdot x^2 + 5$

B: $f(x) = 0{,}001875 \cdot x^2 + 5$

C: $f(x) = 0{,}001875 \cdot x^2 - 5$

Schreibe die richtige Funktionsgleichung auf. ....

Beschreibe, woran du erkannt hast, dass die beiden anderen Funktionsgleichungen die Parabel **nicht** beschreiben. ....

e) Berechne die Länge des Halteseils zwischen den Punkten P_2 und P_3.

---

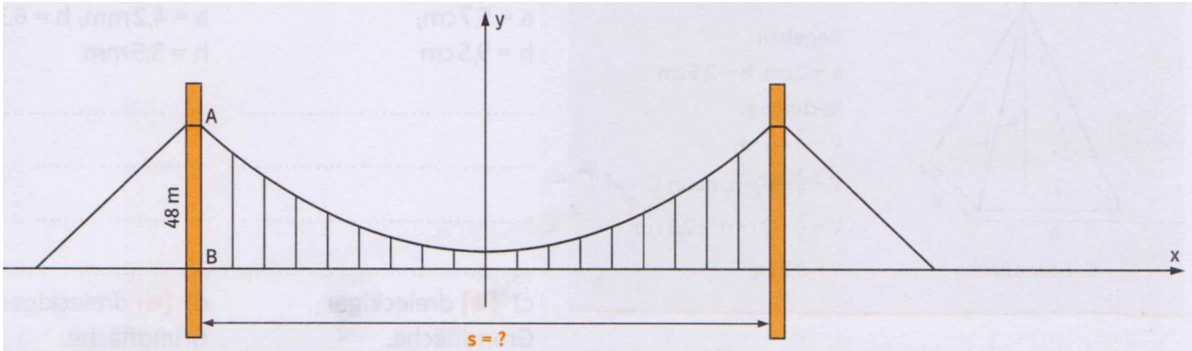
4 Lösung:

a.) 5 m
b.) 400 m
c.) $P_1(-200/80)$
d.) $f(x) = 0{,}001875\ x^2 + 5$
  Begründung:
  A: nach unten geöffnet
  C: schneidet die y-Achse bei -5
e.) Länge des Halteseils: +- 128,062 m

Aufgabe 7[5]:

Eine Hängebrücke, deren Hauptseil in einer Höhe von 48 m über der Straße parabelförmig an den Brückenpfeilern hängt hat die Funktionsgleichung:

f(x) 0,002 x^2 + 3

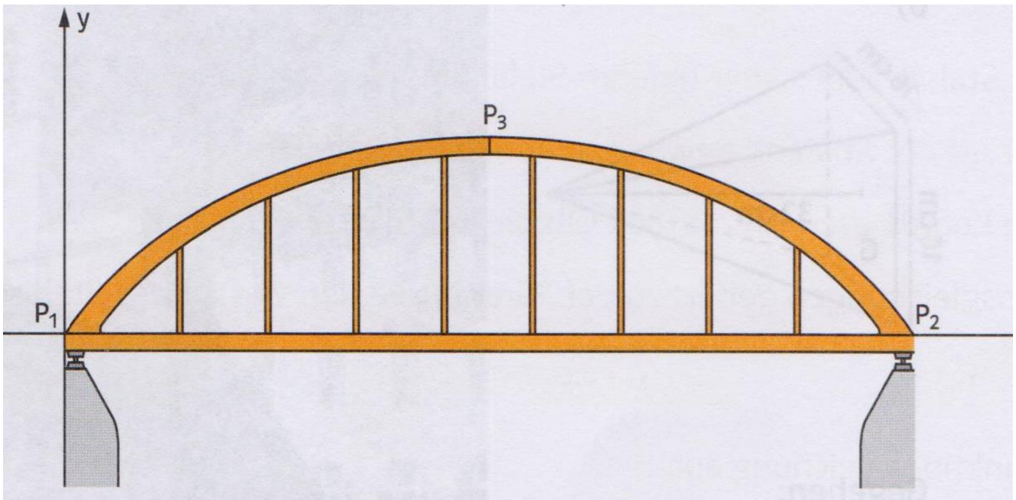


Berechne den Abstand zwischen den beiden Brückenpfeilern.

Aufgabe 8[6]:

Der Brückenbogen dieser Brücke lässt sich mit der Funktionsgleichung

f(x) = -0,007 x^2 + 1,3 x beschreiben.



a) Wie weit liegen P_1 und P_2 auseinander?
b) Berechne den maximalen Punkt des Brückenbogens!

[5] Lösung: Abstand: 2-mal 150m = 300 m

[6] Lösung: a.) +- 185,7 m b.) P_3: +- 60,36 m hoch

Aufgabe 9[7]:

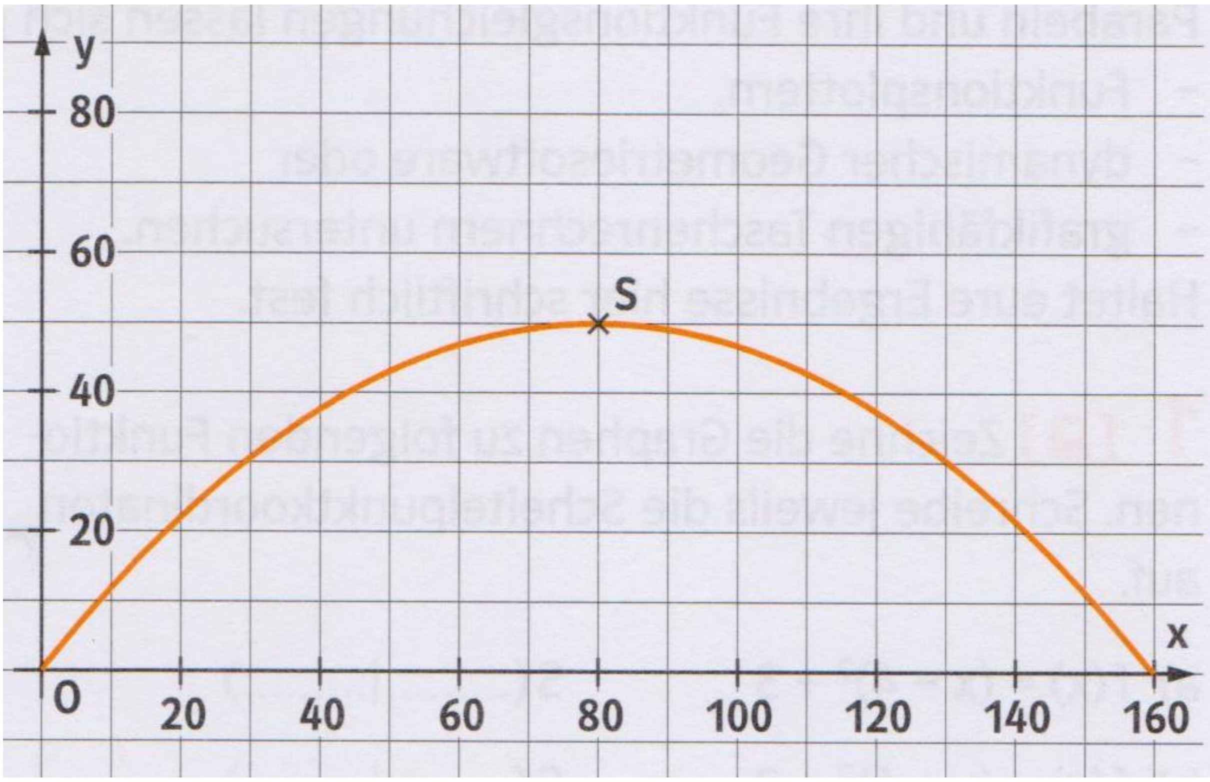
Eine parabelförmige Wasserfontäne in einem Brunnen lässt sich durch die Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}875\ x^2 + 3{,}5x$ beschreiben.

a.) Wie hoch ist der Scheitelpunkt der Fontäne über der Wasseroberfläche des Brunnens?

b.) Wie weit liegen Anfang und Ende des Fontänenbogens auseinander?

Aufgabe 10[8]:

Die Flugbahn eines Golfballes kann durch die abgebildete Parabel beschrieben werden:



a.) Ermittele die Koordinaten des Scheitelpunktes!
b.) Ist ‚a' positiv oder negativ?
c.) Berechne ‚a' der Funktionsgleichung!

---

[7] Lösung:

a.) Der Scheitelpunkt liegt 3,5 m über der Wasseroberfläche.
b.) $x_1 = 4$ m; $x_2 = 0$ m → Beide Punkte liegen 4m weit auseinander.

[8] *Lösung:*

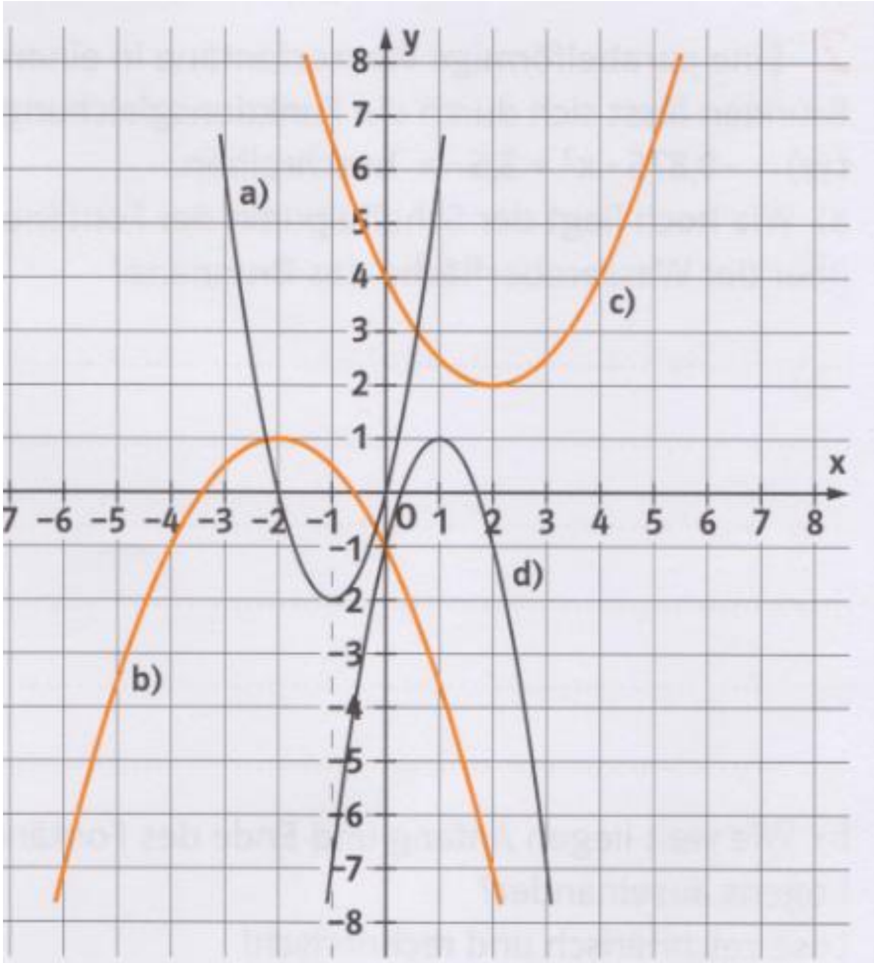
a) S(80/50)
b) Negativ
c) $f(x) = -0.0078125\ (x - 80)^2 + 50$

Aufgabe 11[9]:

Erstelle der folgenden Parabeln:

a.) die Scheitelpunktfunktionsgleichung

b.) die Funktionsgleichung!



---

[9] Lösung:

a) $f(x) = 2(x + 1)^2 – 2$ $\quad$ $f(x) = 2x^2 + 4x$

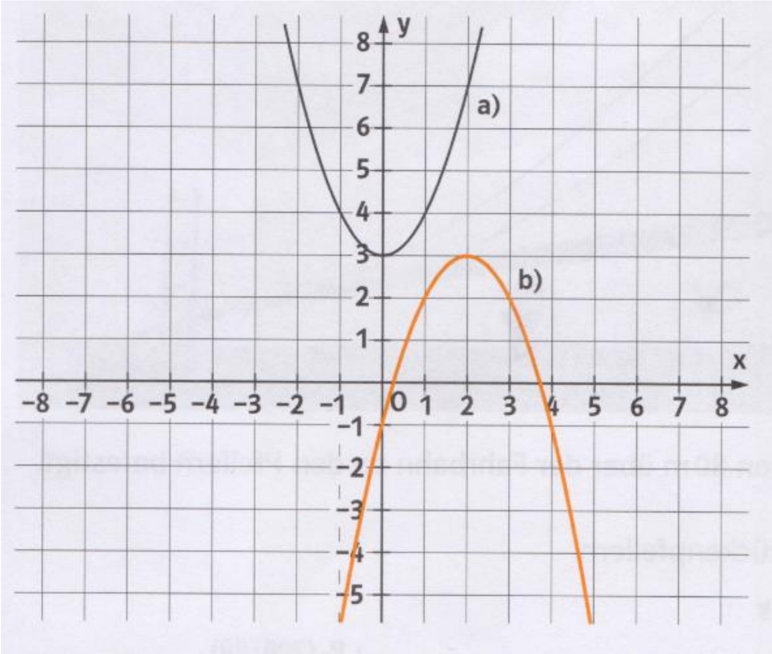
b) $f(x) = -0{,}5(x + 2)^2 + 1$ $\quad$ $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 – 2x – 1 = -0{,}5x^2 – 2x - 1$

c) $f(x) = 0{,}5(x – 2)^2 + 2$ $\quad$ $f(x) = 0{,}5x^2 – 2x + 4$

d) $f(x) = -2(x – 1)^2 + 1$ $\quad$ $f(x) = -2x^2 – 4x - 1$

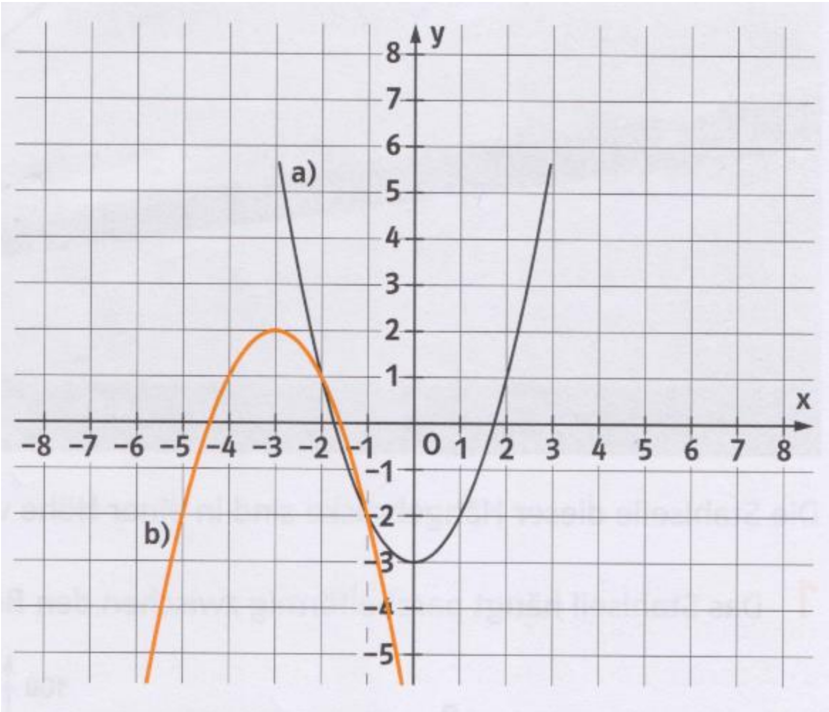
Aufgabe 12[10]:

Erstelle die Funktionsgleichung folgender Funktionen!



Aufgabe 13[11]:

Erstelle die Funktionsgleichung folgender Funktionen!



[10] Lösung: a.) $f(x) = x^2 + 3$ b.) $f(x) = -(x - 2)^2 + 3$
[11] Lösung: a.) $f(x) = x^2 - 3$ b.) $f(x) = -(x + 3)^2 + 2$

Aufgabe 14:

Berechne die Scheitelkoordinaten und skizziere jeweils die Parabel mit der Gleichung

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

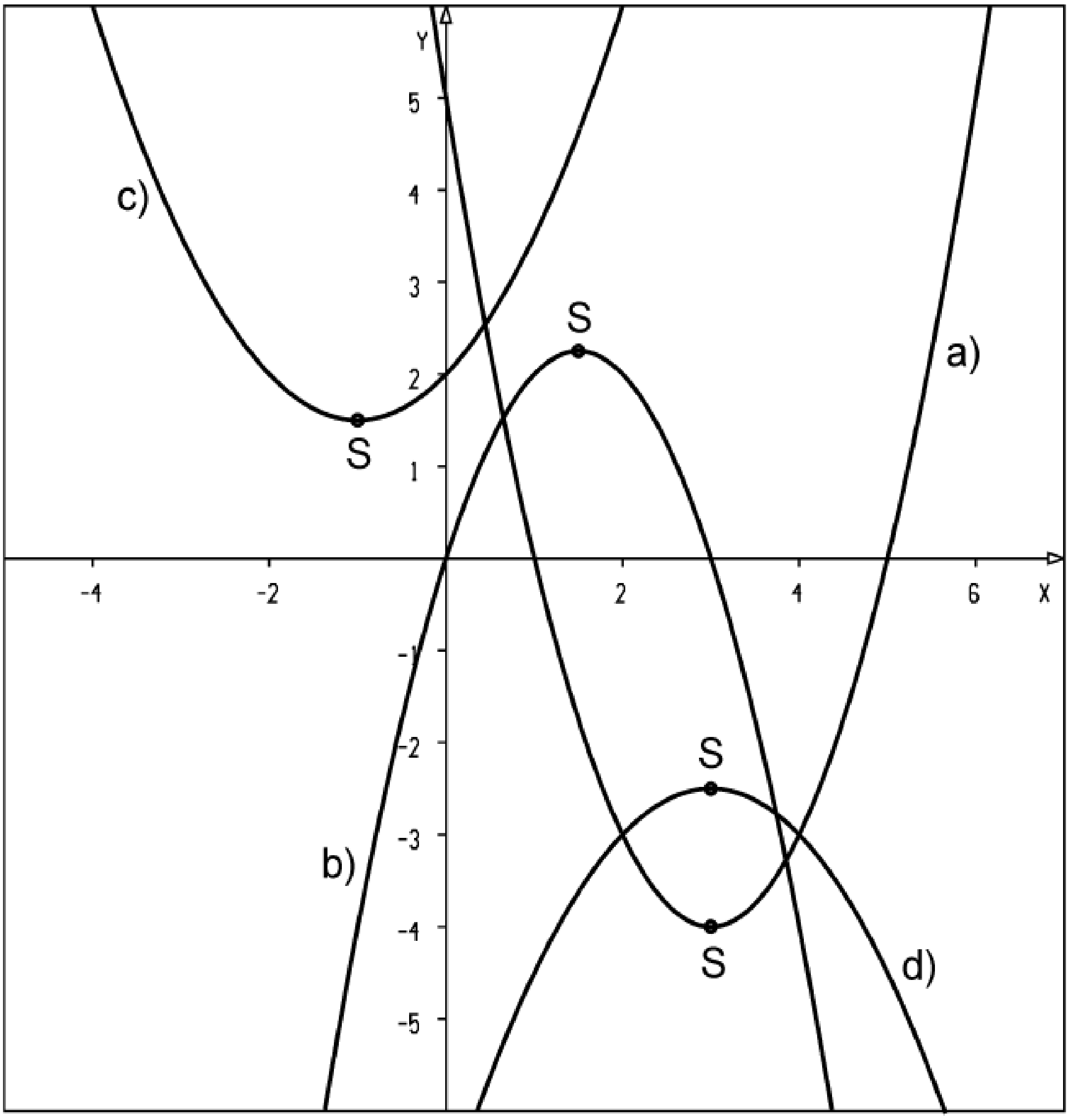
b) $f(x) = -x^2 + 3x$

c) $f(x) = 0{,}5x^2 + x + 2$

d) $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 7$

Lösung zur Aufgabe 7:

$\underline{\underline{S_a(3/-4)}}$ $\underline{\underline{S_b(1,5/2,25)}}$ $\underline{\underline{S_c(-1/1,5)}}$ $\underline{\underline{S_d(3/-2,5)}}$



VIII. Ermitteln von Funktionsgleichungen

A.) Ermitteln der Funktionsgleichung einer NORMALPARABEL

a = ________

Um die Funktionsgleichung einer Normalparabel zu ermitteln, brauchen wir mindestens die Koordinaten von **mindestens 2 Punkten, durch die die Parabel führt.**

Die ***Variablen p*** und ***q*** müssen ermittelt werden.

Beispiel:
Eine Normalparabel zeigt folgende Punkte auf:
A(-2; 6) und B(-5; 3)

$y = ax^2 + px + q \qquad a = 1$

METHODE: EINSETZUNGSVERFAHREN:

- Wir setzen die Koordinate (-2; 6) vom **Punkt A** in $y = ax^2 + px + q$ ein.

$$6 = (-2)^2 + b(-2) + c$$

$$6 = 4 - 2p + q \qquad /-4$$
$$2 = -2p + q \qquad / +2p$$
$$\underline{\underline{q_1 = 2 + 2p}}$$

- Wir setzen die Koordinate (-5; 3) vom **Punkt B** in $y = ax^2 + px + q$ ein.

$$3 = (-5)^2 + p(-5) + q$$

$$3 = 25 - 5p + q \qquad /-25$$
$$-22 = -5p + q \qquad / +5b$$
$$\underline{\underline{q_2 = 5p - 22}}$$

- $q_1 = q_2$

$2 + 2p = 5p - 22 \qquad / -2p + 22$
$3p = 24 \qquad / (:3)$
$\underline{\underline{p = 8}}$

$q = 2 + 2\cdot 8$ oder: $q = 5\cdot 8 - 22$
$q = 2 + 16$ $\qquad q = 40 - 22$
$\underline{\underline{q = 18}}$ $\qquad \underline{\underline{q = 18}}$

$$\underline{\mathbf{f(x) = y = x^2 + 8x + 18}}$$

Aufgabe 15:

Ermittle die Gleichung der nach oben geöffneten Normalparabel, die durch die Punkte A(-4|2) und B(1|-3) verläuft.

Aufgabe 16:

Ermittele die Funktionsgleichung einer Normalparabel anhand der Punkte
C(-1;2) und D(-3;2).

Aufgabe 18:

Die Gleichung einer quadratischen Funktion der Normalparabel $y = ax^2 + px + q$ hat den Scheitel S(3; 5) und die Formvariable b = 2. Ermittle ihre Funktionsgleichung.

Aufgabe 20:

Eine Parabel mit dem Scheitel S(-2|9) enthält den Punkt P(-7|1). Bestimme die Funktionsgleichung.

B.) Ermitteln einer beliebigen Funktionsgleichung einer PARABEL mit a ≠ 1

Wir müssen mindestens ***drei Punkte der Parabel*** kennen, um deren Funktionsgleichung aufzustellen. Die ***Variablen a, b*** und ***c*** müssen ermittelt werden.

Beispiel:

Wir lesen aus einer Parabel folgende Punkte heraus: (1 / 4), (3 / -4) und (5 / 4)

Stufe 1: ***Einsetzen Punkt 1***

Wir setzen die Koordinaten eines ersten Punktes in die allgemeine Funktionsgleichung: $y = ax^2 + px + q$

- Punkt (1 / 4) : $4 = a\,1^2 + 1\,p + q$
  $4 = a + p + q$
  $q_1 = 4 - a - p$

Stufe 2: ***Einsetzen Punkt 2***

Wir setzen die Koordinaten eines zweiten Punktes in die allgemeine Funktionsgleichung: $y = ax^2 + px + q$

- Punkt (3 / -4) : $-4 = a\,3^2 + 3\,p + q$
  $-4 = 9a + 3p + q$
  $q_2 = -4 - 9a - 3p$

Stufe 3: ***Gleichsetzung der Variabel ‚q'***

Sowohl c_1 als auch c_2 umschreiben dieselbe Parabel, sind also identisch.

$c_1 = c_2$
$4 - a - p = -4 - 9a - 3p$
$8 + 8a + 2p = 0$
$2p = -8 - 8a$
$\underline{p = -4 - 4a}$ Anmerkung: Wir hätten genauso gut 'a' herausheben können

Stufe 3: ***Zusammenfassen der Variabel ‚q' auf eine Variabel***

Wir setzen *'p'* in 'q_1' oder 'q_2' ein.

$q = 4 - a - (-4 - 4a)$
$q = 4 - a + 4 + 4a$
$q = 4 + 3a + 4$
$\underline{q = 3a + 8}$

Stufe 4: ***Einsetzen der Koordinaten und der Variablen in Punkt 3***

- Punkt (5/4): $4 = 25a + 5p + q$
  $4 = 25a + 5(-4 - 4a) + (3a + 8)$
  $4 = 25a - 20 - 20a + 3a + 8$
  $4 = 8a + 8$
  $12 = 8a$
  $a = 2$

Stufe 5: ***Ermittelung der Werte der Variabeln***

Wir setzen ein: $p = -4 - 4 * \mathbf{2} = -12$

$q = 3 * \mathbf{2} + 8 = 14$

Stufe 6: Zusammenfassen in eine Funktionsgleichung:

$a = 2$ $p = -12$ $q = 14$

$$\boxed{y = 2x^2 - 12x + 14}$$

Aufgabe 22:

Stelle die Gleichung der quadratischen Funktion auf, die durch folgende Punkte führt: (10 / 31); (20 / 24); (90 / 31)

Aufgabe 23:

Stelle die Gleichung der quadratischen Funktion auf, deren Graph durch die Punkte P(0|-1), Q(2|-1), R(-2|2) verläuft.

Aufgabe 24:

Bestimme die Gleichung einer quadratischen Funktion so, daß deren Graph durch die Punkte A(-2,5|0), B(-0,5|8) und C(1,5|0) verläuft.

Üben und Vertiefen

Aufgabe 10 *(Westermann EK, S.28)*

Aufgabe 13 *(Westermann EK, S.28)*

Aufgabe 2 b.) *(Westermann EK, S.30)*

Aufgabe 1 b.) c.) *(Westermann EK, S.31)*

Aufgabe 2 b.) *(Westermann EK, S.31)*

Aufgabe 3 b.) c.) *(Westermann EK, S.31)*

Aufgabe 4 *(Westermann EK, S.31)*

IX. Schnittpunkte der Parabel mit den Achsen

Beispiel 1:
$y = (x + 2)^2 – 9$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $y = 0$

Wir setzen ein:

$0 = (x + 2)^2 – 9$ *‚Différence de 2 carrés'*

$0 = (x + 2 – 3)(x + 2 + 3)$ *‚Équation Produit Nul'*

$(x – 1)(x + 5) = 0$

Wenn : $x – 1 = 0 \rightarrow \underline{\underline{x = 1}}$ $S_x^1(1; 0)$

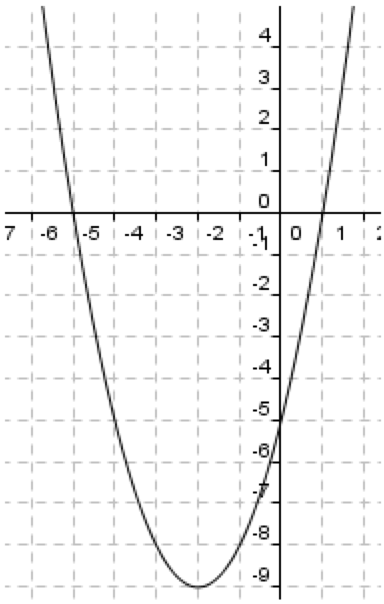
$x + 5 = 0 \rightarrow \underline{\underline{x = -5}}$ $S_x^2(-5; 0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0$

Wir setzen f(0) ein :

$y = (0 + 2)^2 – 9$
$y = 4 – 9$
$\underline{\underline{y = -5}}$

$S_y\ (0;\ -5)$



Beispiel 2:
$y = x^2 - 2x - 8$

<u>Schnittpunkt mit der x-Achse:</u> $y = 0$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$x^2 - 2x - 8$ → zu einem Produkt ausklammern

<u>2 Methoden:</u>

<u>a.) Summe et Produkt</u>

$x^2 - 2x - 8 = 0$ S = -2 P = -8

Die beiden Werte sind: (-4) (+ 2)

$(x - 4)(x + 2) = 0$

Wenn: $x - 4 = 0$ → $x = 4$

$x + 2 = 0$ → $x = -2$

<u>b.) Formel zum Auflösen Funktionen des 2. Grades:</u>

<u>Formel zum Auflösen Funktionen des 2. Grades:</u>

$$\boxed{\mathbf{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

Wenn $\sqrt{\Delta} < 0$: Keine Lösung

Wenn $\sqrt{\Delta} = 0$: 1 Lösung

Wenn $\sqrt{\Delta} > 0$: 2 Lösungen

$x^2 - 2x - 8 = 0$ a = 1 b = -2 c = -8

$\mathbf{x_{1/2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}}$

$\mathbf{= \frac{+2 \pm \sqrt{36}}{2}}$

$= \frac{2 \pm 6}{2}$

$\underline{\underline{x_1 = 4}}$

$\underline{\underline{x_2 = -2}}$

Aufgabe 15:

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 12$

Ermittele:

a.) In welche Richtung ist die Parabel geöffnet?

b.) Ermittele den Scheitelpunkt!

c.) Ermittele die Symmetrie-Achse!

d.) Ermittele den Schnittpunkt mit der x-Achse

e.) Ermittele den Schnittpunkt mit der y-Achse

f.) Stelle eine Wertetabelle her!

g.) Stelle die Parabel graphisch dar! + Symmetrie-Achse !

Aufgabe 16:

$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

Ermittele:

a.) In welche Richtung ist die Parabel geöffnet?

b.) Ermittele den Scheitelpunkt!

c.) Ermittele die Symmetrie-Achse!

d.) Ermittele den Schnittpunkt mit der x-Achse

e.) Ermittele den Schnittpunkt mit der y-Achse

f.) Stelle eine Wertetabelle her!

g.) Stelle die Parabel graphisch dar! + Symmetrie-Achse !

Aufgabe 17:

$y = -\frac{1}{3}x^2$

Ermittele:

a.) In welche Richtung ist die Parabel geöffnet?

b.) Ermittele den Scheitelpunkt!

c.) Ermittele die Symmetrie-Achse!

d.) Ermittele den Schnittpunkt mit der x-Achse

e.) Ermittele den Schnittpunkt mit der y-Achse

f.) Stelle eine Wertetabelle her!

g.) Stelle die Parabel graphisch dar! + Symmetrie-Achse !

Lösung zu Aufgabe 15: $\boxed{y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 12}$

a.) a<0: konkav nach unten; nach unten geöffnet

b.) Scheitelpunktform: $y = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 16$ → Scheitelpunkt: S(+4; 16)

c.) Symmetrieachse: x = 4

d.) Schnittpunkt mit der x-Achse: y = 0

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-\frac{1}{2}}$$

$$x' = \frac{-2+4}{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4$$

$$x'' = \frac{-2-4}{-\frac{1}{2}} = \frac{-6}{-\frac{1}{2}} = 12$$

$S_x^1(-4; 0)$ $S_x^2(12; 0)$

e.) Schnittpunkt mit der y-Achse: x = 0

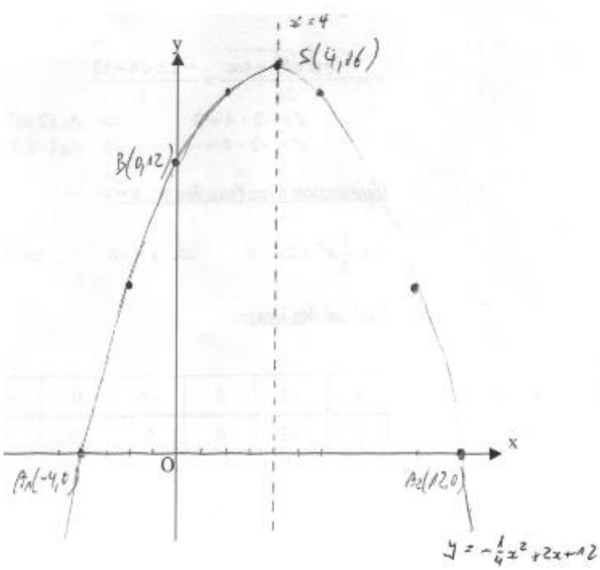
$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 12 \quad \Rightarrow \quad y = 12$$

Sy (0; 12)

f.) Wertetabelle:

x	4	−4	12	0	−2	10	2	6
y	16	0	0	12	7	7	15	15

g.) Graphische Darstellung:



<u>Lösung zu Aufgabe 16:</u> $\boxed{y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6}$

a.) a > 0: nach oben geöffnet

b.) <u>Scheitelpunktform:</u> $y = \frac{1}{2}(x+2) - 8$ → <u>Scheitelpunkt:</u> S(-2; -8)

c.) <u>Symmetrieachse:</u> x = - 2

d.) <u>Schnittpunkt mit der x-Achse:</u> y = 0

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{1}$$

$$x' = -2 + 4 = 2 \qquad \Rightarrow \quad A_1\ (2;0)$$

$$x'' = -2 - 4 = -6 \qquad \Rightarrow \quad A_2\ (-6;0)$$

$$S_x^1(2;0) \qquad S_x^2(-6;0)$$

e.) <u>Schnittpunkt mit der y-Achse:</u> x = 0

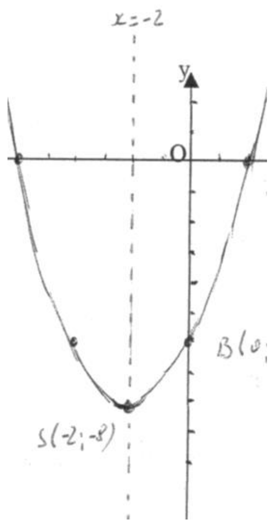
$$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 \qquad \Rightarrow \quad y = -6$$

$$Sy\ (0;-6)$$

f.) <u>Wertetabelle</u>:

x	-2	2	-6	0	-4
y	-8	0	0	-6	-6

g.) <u>Graphische Darstellung:</u>



Lösung zu Aufgabe 17: $\boxed{y = -\frac{1}{3}x^2}$

a.) a < 0: nach unten geöffnet

b.) Scheitelpunkt: b = 0 c = 0 → Scheitelpunkt: S(0;0)

c.) Die y-Achse ist die Symmetrieachse! x = 0

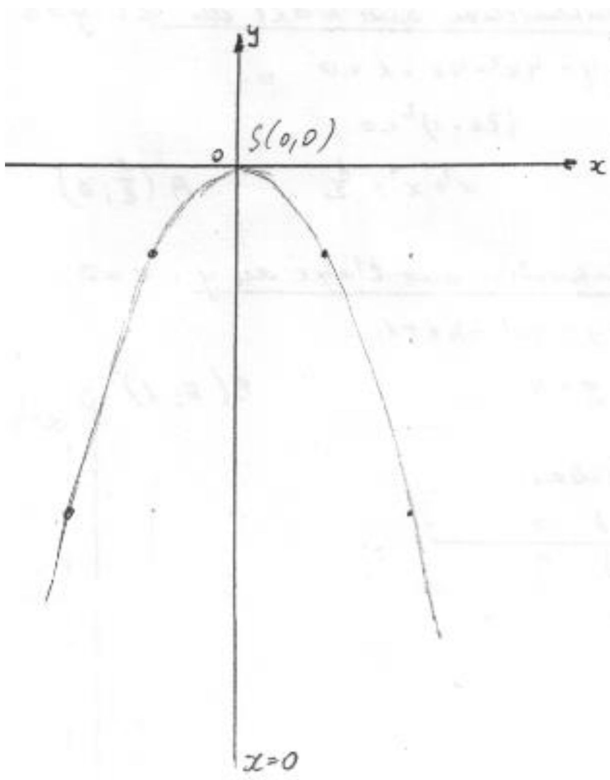
d.) Schnittpunkt mit der x-Achse: $S_x(0;0)$

e.) Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0;0)$

f.) Wertetabelle:

x	3	6	-3	-6
y	-3	-12	-3	-12

g.) Graphische Darstellung:



X. Schnittpunkte einer Parabel und einer Geraden

(einer Funktion des zweiten Grades mit einer Funktion des ersten Grades)

Beispiel:

$$y_1 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$$

$$y_2 = \frac{3}{2}x - 5$$

Merkmale des Schnittpunktes:

Am Schnittpunkt sind die Koordinaten beider Funktionen gleich.

$x^* = x_1 = x_2$ $\qquad$ $y^* = y_1 = y_2$

Hier im Beispiel:

Gemeinsamer Wert auf der x-Achse: $\quad y_1 = y_2$

$$-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3 = \frac{3}{2}x - 5 \qquad / \cdot 4$$

$$-x^2 + 8x - 12 = 6x - 20 \qquad / -6x + 20$$

$$-x^2 + 2x + 8 = 0 \qquad / \cdot(-1)$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

Methode: Summe & Produkt:

S = -2
P = -8
Die zwei Zahlen sind :
(-4) und (+ 2)

$(x - 4)(x + 2) = 0$

Wenn:
$x - 4 = 0 \rightarrow x_1^* = 4$
$x + 2 = 0 \rightarrow x_2^* = -2$

Methode:„Formule générale“:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

a= 1
b = -2
c = -8

$x_1^* = 4$
$x_2^* = -2$

Gemeinsame Werte auf der y-Achse:

Die ermittelten gemeinsamen x-Werte können in eine von beiden Funktionen eingesetzt werden.

$f(4) = -\frac{1}{4}4^2 + 2 \cdot 4 - 3$ $\qquad$ $f(4) = \frac{3}{2}4 - 5$

$\underline{\underline{f(4) = 1}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{f(4) = 1}}$

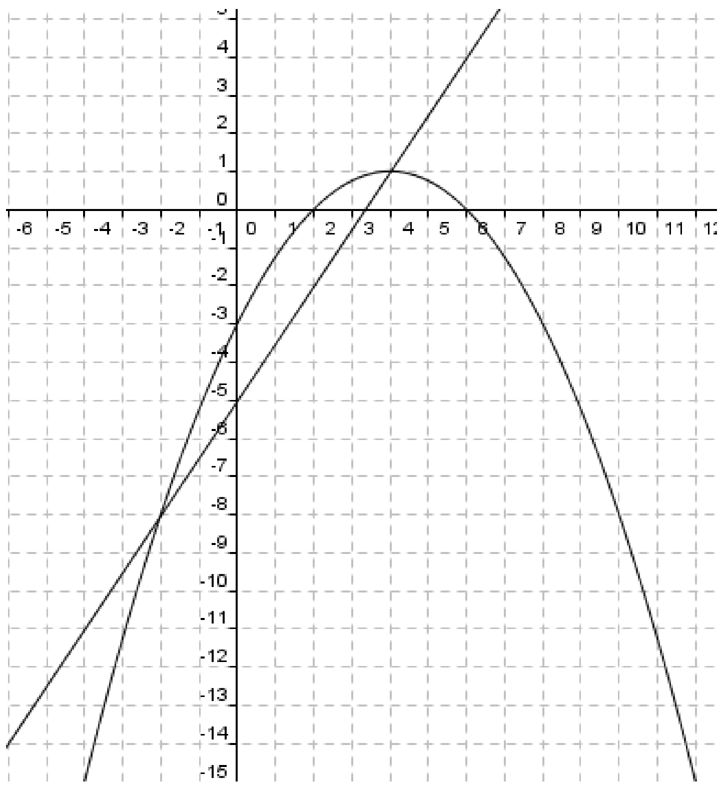
oder:

$f(-2) = -\frac{1}{4}(-2)^2 + 2\cdot(-2) - 3$ $\qquad$ $f(-2) = \frac{3}{2}(-2) - 5$

$\underline{\underline{f(-2) = -8}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{f(-2) = -8}}$

$P_1(4; 1)$

$P_2(-2; -8)$



Aufgabe 18:

Ermittele den Schnittpunkt der Parabel p1 ($y = x^2 - 4x + 2,5$) und der Geraden g ($y = x - 1,5$).

Zeichne beide Funktionen in das Koordinatensystem ein!

XI. Schnittpunkte zweier Parabeln
(zweier Funktionen des zweiten Grades)

Beispiel:

$$y_1 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - 8$$

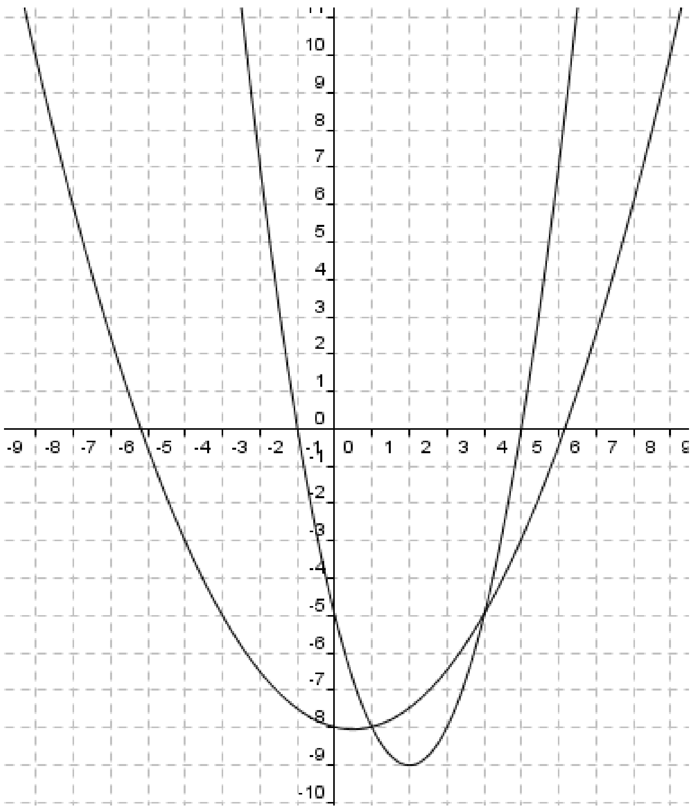
$$y_2 = x^2 - 4x - 5$$

$y_1 = y_2$

$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - 8 = x^2 - 4x - 5 \qquad / \cdot 4$

$x^2 - x - 32 = 4x^2 - 16x - 20 \qquad / -4x^2 + 16x + 20$

$-3x^2 + 15x - 12 = 0$



Methode:„Formule générale“:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a = -3
b = +15
c = -12

$x_1^* = 4 \qquad x_2^* = 1$

Wir setzen $x_1 = 4$ und $x_2 = 1$ in
$y_1 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 8$ oder in
$y_2 = x^2 - 4x + 5$ ein.

Ergebnis:

$y_1^* = f(4) = -5 \qquad P_1(4;-5)$

$y_2^* = f(1) = -8 \qquad P_2(1;-8)$

Aufgabe 19:

Ermittele den Schnittpunkt der Parabel p_1 ($y = x^2 + 2x + 2$) und der Parabel p_2 ($y = -x^2 - 2x + 2$).

Zeichne beide Funktionen in das Koordinatensystem ein!

Gelöste Aufgabe 20: Ermittele

- den Scheitelpunkt und
- die Koordinaten der Schnittpunkte folgender quadratischer Funktionen

$f(x) = x^2 - 4x + 1, \quad g(x) = -x^2 + 2x + 1$

Lösung:

$f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3, \quad S_f = (2, -3)$

$g(x) = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2, \quad S_g = (1, 2)$

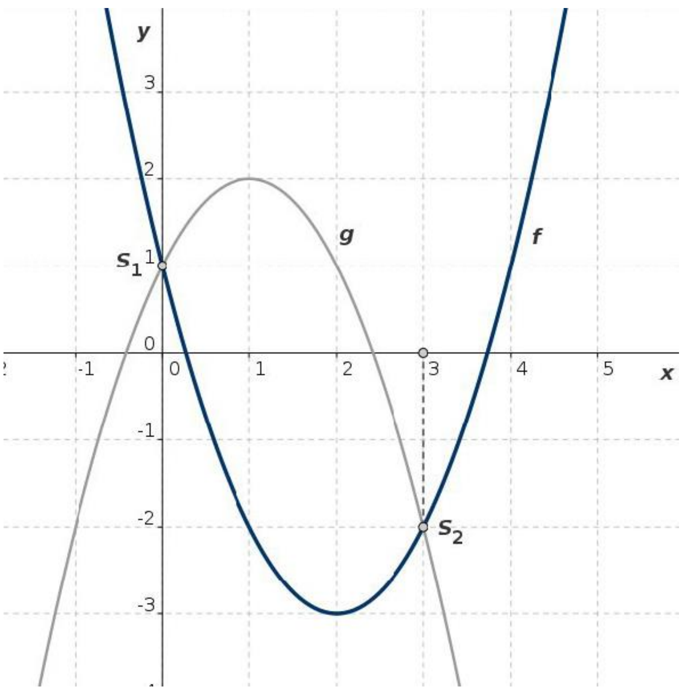
Die Gleichung $f(x) = g(x)$ bestimmt die Schnittpunkte der Funktionen:

$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 1 = -x^2 + 2x + 1 \quad \Leftrightarrow$

$2x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-3) = 0$

$x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad f(x_1) = 1, \quad f(x_2) = -2$

$S_1 = (0, 1), \quad S_2 = (3, -2)$



Gelöste Aufgabe 21: Ermittele

- den Scheitelpunkt und
- die Koordinaten der Schnittpunkte folgender quadratischer Funktionen

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3, \qquad g(x) = \frac{x^2}{2} - 2x$$

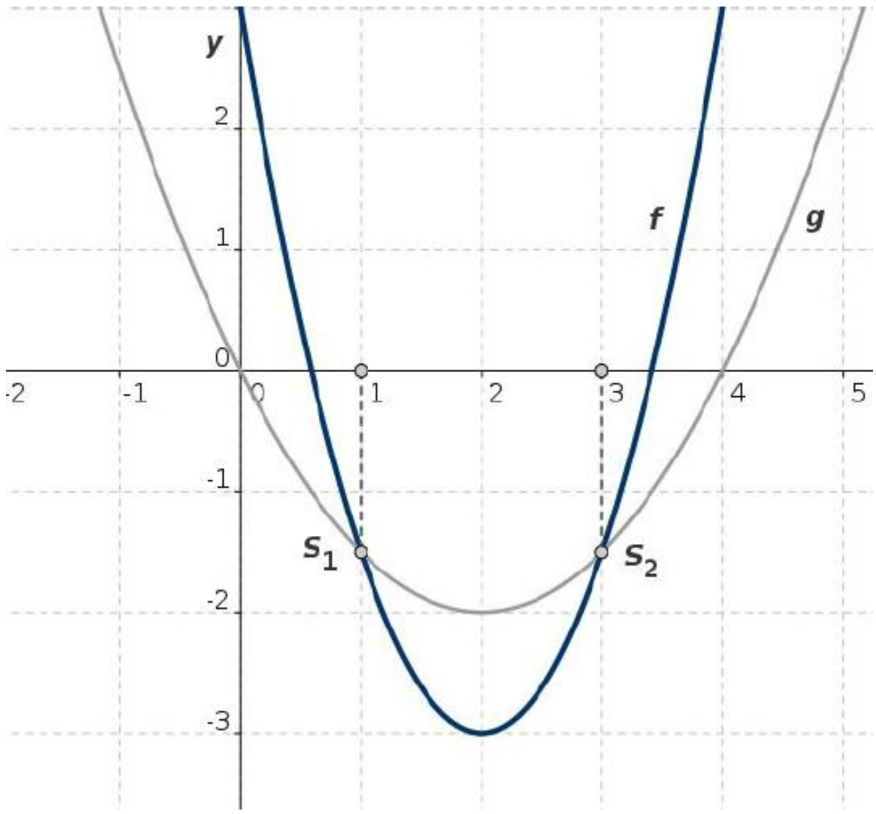
Lösung:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3 = \frac{3}{2}(x-2)^2 - 3, \qquad S_f = (2, -3)$$

$$g(x) = \frac{x^2}{2} - 2x = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2, \qquad S_g = (2, -2)$$

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \qquad S_1 = \left(1, -\frac{3}{2}\right), \qquad S_2 = \left(3, -\frac{3}{2}\right)$$



Gelöste Aufgabe 22: Ermittele

- den Scheitelpunkt und
- die Koordinaten der Schnittpunkte folgender quadratischer Funktionen

$$f(x) = x^2 + 2, \qquad g(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2}$$

Lösung:

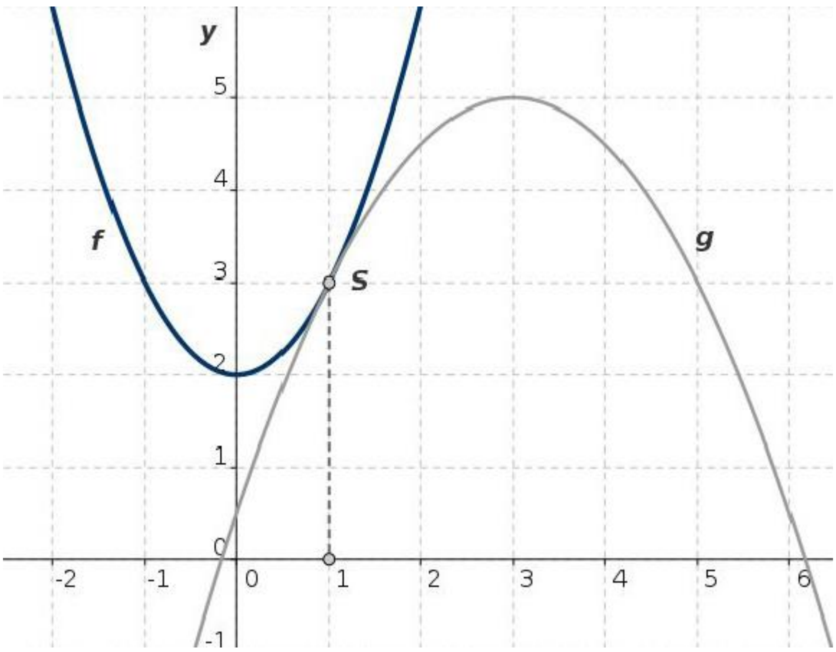
$$f(x) = x^2 + 2, \qquad S_f = (0, 2)$$

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 5, \qquad S_g = (3, 5)$$

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = 1, \qquad S = (1, 3)$$

Die Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ haben einen Berührungspunkt $S(1, 3)$.



Gelöste Aufgabe 23:

Ermittele die Koordinaten der Schnittpunkte folgender quadratischer Funktionen!

$$f(x) = x^2 + 2, \qquad g(x) = \frac{x^2}{2} + 1$$

Lösung:

Beide Parabeln sind nach oben geöffnet und symmetrisch bezüglich der y-Achse. Die Gleichungen können in folgender Form dargestellt werden

$$f(x) = a_1 x^2 + c_1, \qquad g(x) = a_2 x^2 + c_2$$

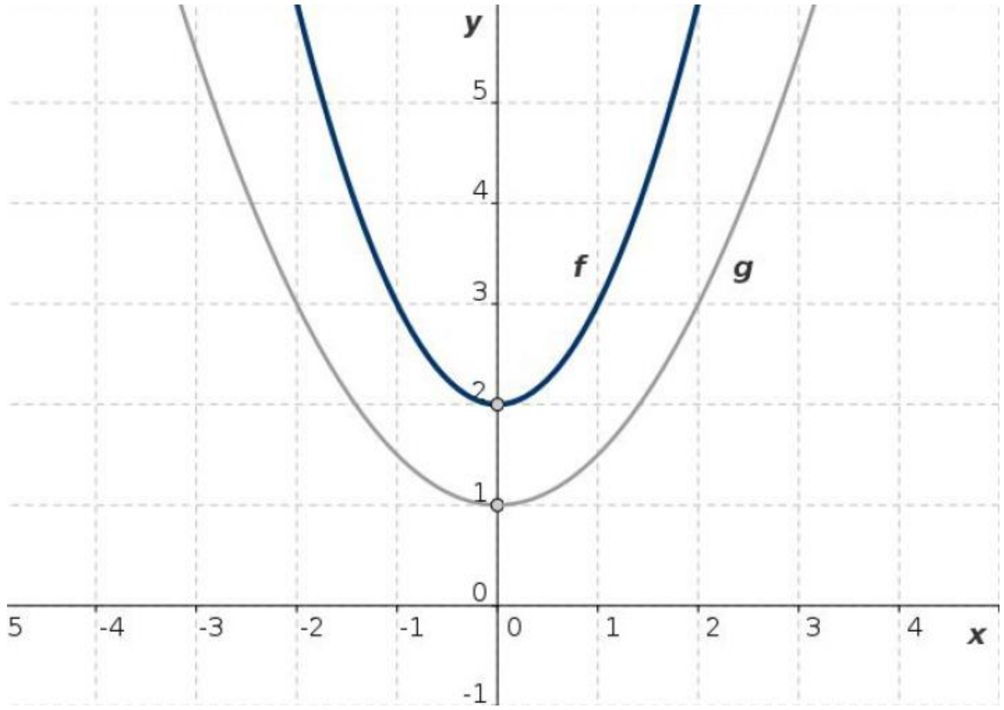
$$a_1,\ a_2 > 0, \qquad a_1 > a_2, \qquad c_1 > c_2$$

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{1}{2}, \qquad c_1 = 2, \qquad c_2 = 1$$

Solche Funktionen haben keine Schnittpunkte $(f(x) > g(x))$.

Die Scheitelpunkte sind:

$$S_f = (0,\ c_1), \qquad S_g = (0,\ c_2)$$



Gelöste Aufgabe 24:

Ermittele die Koordinaten der Schnittpunkte folgender quadratischer Funktionen!

$$f(x) = x^2 + 2, \qquad g(x) = -\frac{x^2}{2} + 1$$

Lösung:

Beide Parabeln sind symmetrisch bezüglich der y-Achse. Die Gleichungen können in folgender Form dargestellt werden

$$f(x) = a_1 x^2 + c_1, \qquad g(x) = a_2 x^2 + c_2$$

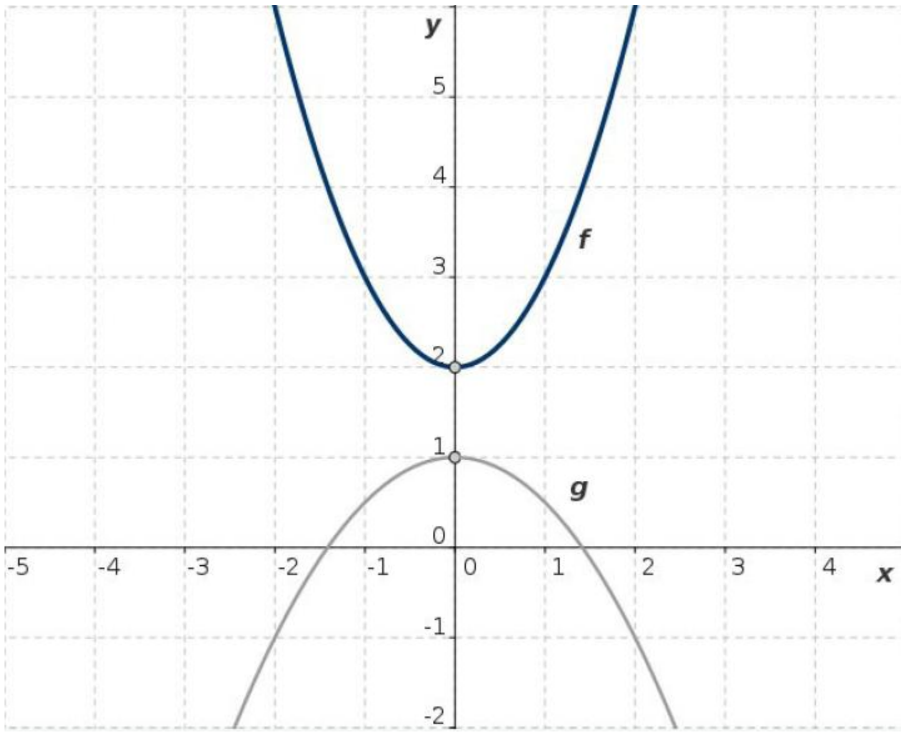
$$a_1 > 0, \qquad a_2 < 0, \qquad c_1 > c_2$$

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = -\frac{1}{2}, \qquad c_1 = 2, \qquad c_2 = 1$$

Die Parabel $y = f(x)$ ist nach oben und die Parabel $y = g(x)$ nach unten geöffnet, sie haben keine Schnittpunkte.

Die Scheitelpunkte sind:

$$S_f = (0, c_1), \qquad S_g = (0, c_2)$$



Gelöste Aufgabe 25:

Ermittele die Koordinaten der Schnittpunkte folgender quadratischer Funktionen!

$$f(x) = x^2 + 2, \qquad g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2$$

Lösung:

Beide Parabeln sind symmetrisch bezüglich der y-Achse. Die Gleichungen können in folgender Form dargestellt werden

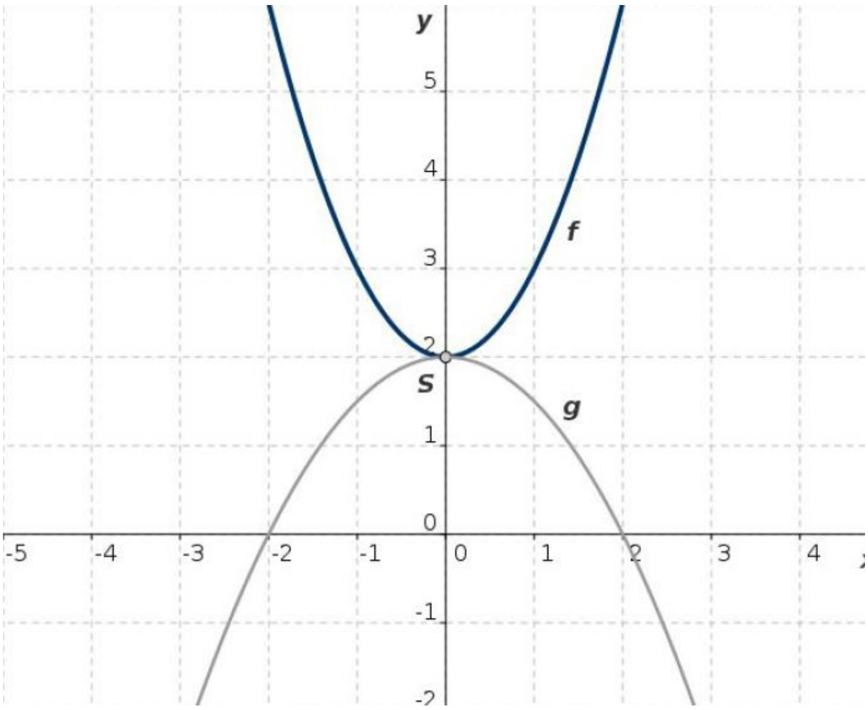
$$f(x) = a_1 x^2 + c_1, \qquad g(x) = a_2 x^2 + c_2$$

$$a_1 > 0, \qquad a_2 < 0, \qquad c_1 = c_2$$

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = -\frac{1}{2}, \qquad c_1 = c_2 = 2$$

Die Parabel $y = f(x)$ ist nach oben und die Parabel $y = g(x)$ nach unten geöffnet. Der Scheitelpunkt der beiden Funktionen ist auch der einzige Schnittpunk

$$S_f = S_g = (0,\ c_1)$$



Gelöste Aufgabe 26:

Ermittele die Koordinaten der Schnittpunkte folgender quadratischer Funktionen!

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad g(x) = \frac{x^2}{4} + 1$$

Lösung:

Beide Parabeln sind nach oben geöffnet und symmetrisch bezüglich der y-Achse. Die Gleichungen können in folgender Form dargestellt werden

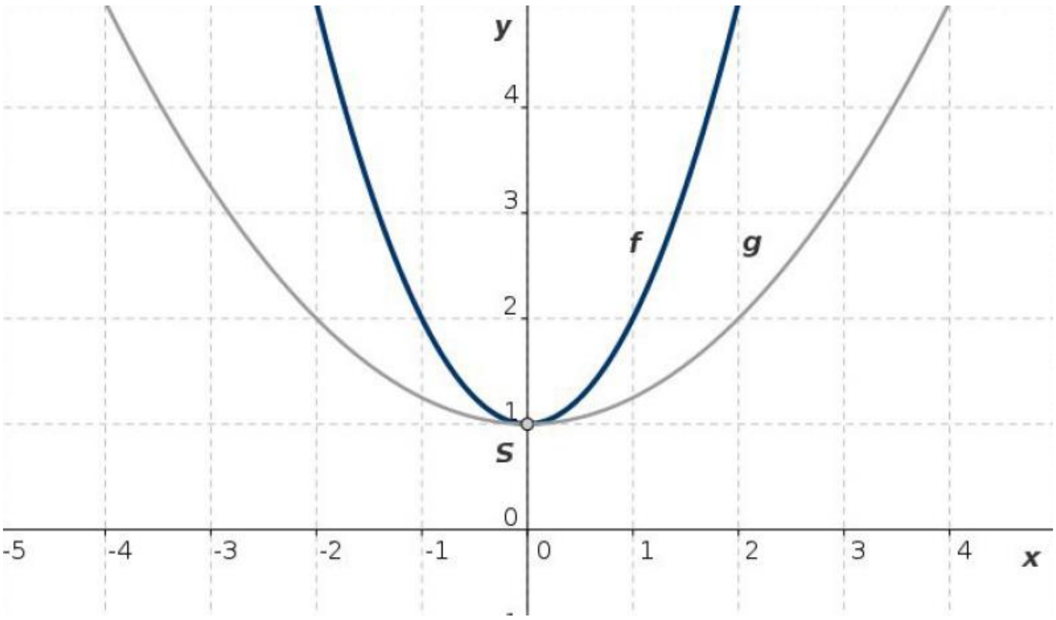
$$f(x) = a_1 x^2 + c_1, \qquad g(x) = a_2 x^2 + c_2$$

$$a_1, \ a_2 > 0, \qquad a_1 > a_2, \qquad c_1 = c_2$$

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{1}{4}, \qquad c_1 = c_2 = 1$$

Der Scheitelpunkt der beiden Funktionen ist auch der einzige Schnittpunkt

$$S_f = S_g = (0, \ c_1)$$



Gelöste Aufgabe 27:

Ermittele die Koordinaten der Schnittpunkte folgender quadratischer Funktionen!

$$f(x) = -x^2 + 1, \qquad g(x) = -\frac{x^2}{4} + 2$$

Lösung:

Beide Parabeln sind nach unten geöffnet und symmetrisch bezüglich der y-Achse. Die Gleichungen können in folgender Form dargestellt werden

$$f(x) = a_1 x^2 + c_1, \qquad g(x) = a_2 x^2 + c_2$$

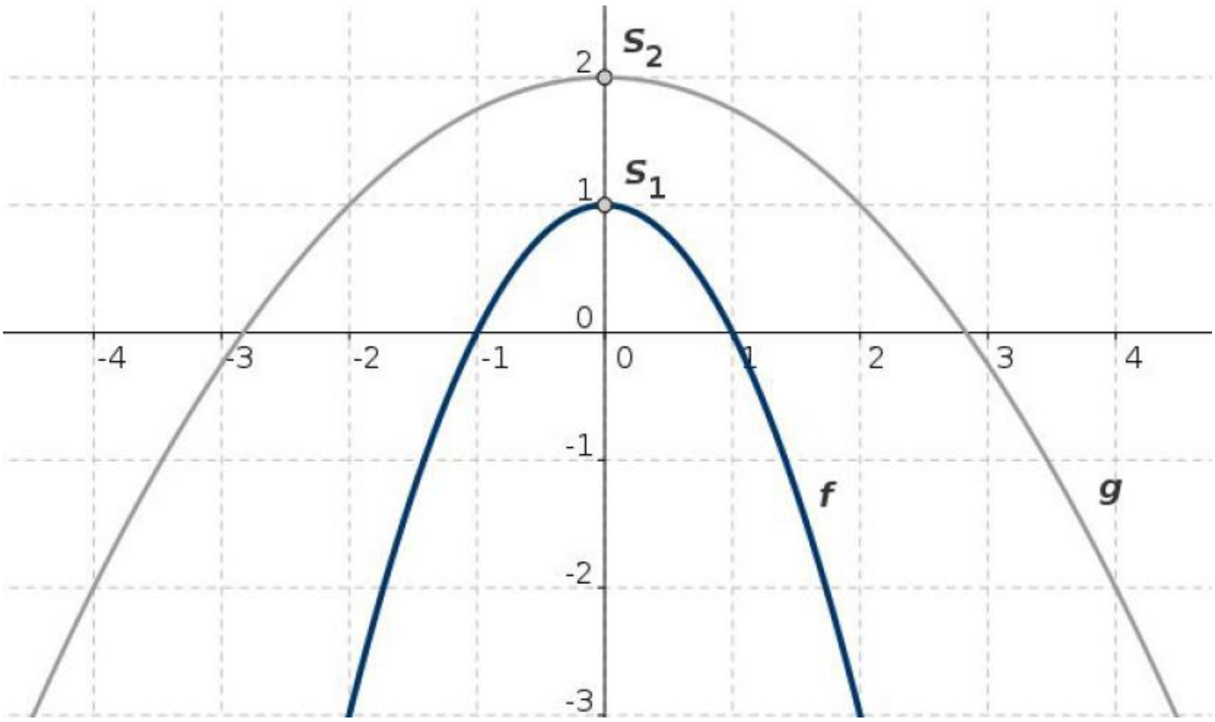
$$a_1, \ a_2 < 0, \qquad a_1 < a_2, \qquad c_1 < c_2$$

$$a_1 = -1, \qquad a_2 = -\frac{1}{4}, \qquad c_1 = 1, \qquad c_2 = 2$$

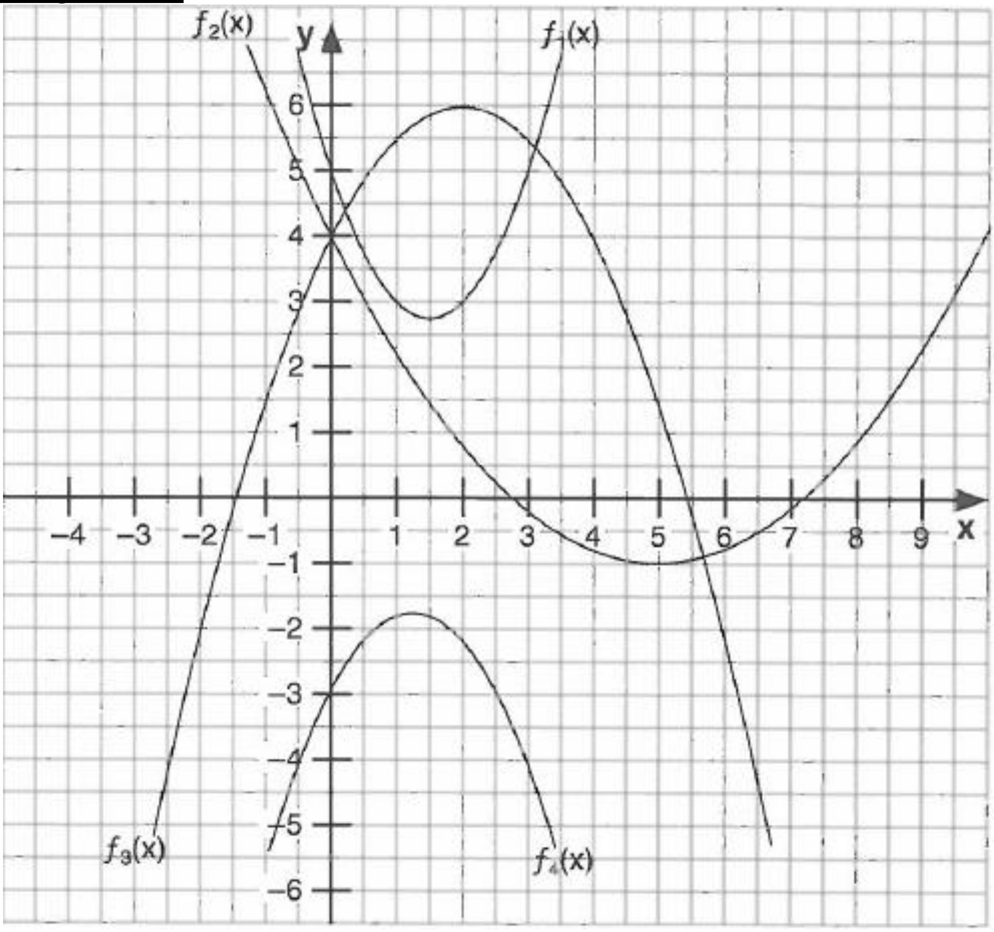
Solche Funktionen haben keine Schnittpunkte.

Die Scheitelpunkte sind:

$$S_f = (0, c_1), \qquad S_g = (0, c_2)$$



Aufgabe 28:



a.) Schätze aus der Zeichnung die Koordinaten des Scheitelpunktes der Funktionsgleichungen $f_1(x)$ bis $f_4(x)$.

b.) Schätze aus der Zeichnung die Koordinaten der vorhandenen Nullstellen der Funktionsgleichungen $f_1(x)$ bis $f_4(x)$.

c.) Ordne folgende Funktionsgleichungen den Graphen richtig zu.

$$g(x) = 0{,}2x^2 - 2x + 4$$
$$h(x) = x^2 - 3x + 5$$
$$k(x) = -0{,}75x^2 + 2x - 3$$
$$l(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 4$$

d.) Berechne die Scheitelpunkte und Nullstellen auf zwei Stellen hinter dem Komma genau.

e.) Berechne die Schnittpunkte der Funktionen $f_3(x)$ und $f_4(x)$

Lösung zu Aufgabe 28:

4 a, b)

$f_1(x)$: $S_1(1{,}5|2{,}75)$, keine Nullstelle
$f_2(x)$: $S_2(5|-1)$, $N_1(2{,}75|0)$, $N_2(7{,}25|0)$
$f_3(x)$: $S_3(2|6)$, $N_3(-1{,}5|0)$, $N_4(5{,}5|0)$
$f_4(x)$: $S_4(1{,}25|-1{,}75)$, keine Nullstelle

4 c)

$g(x) \rightarrow f_2(x)$
$h(x) \rightarrow f_1(x)$
$k(x) \rightarrow f_4(x)$
$l(x) \rightarrow f_3(x)$

4 d)

$S_1(1{,}5|2{,}75)$
$S_2(5|-1)$, $N_1(2{,}76|0)$, $N_2(7{,}25|0)$
$S_3(2|6)$, $N_3(-1{,}46|0)$, $N_4(5{,}46|0)$
$S_4(-1{,}\overline{3}|-1{,}\overline{6})$

4 e) Schnittpunkte zwischen f_3 und f_2:
$P_1(0|4)$, $P_2(5{,}7143|-0{,}898)$

ÜBEN UND VERTIEFEN

Aufgabe 2 *(Westermann EK, S.47)*

Aufgabe 4 *(Westermann EK, S.47)*

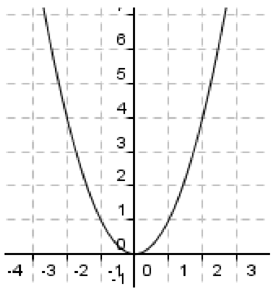
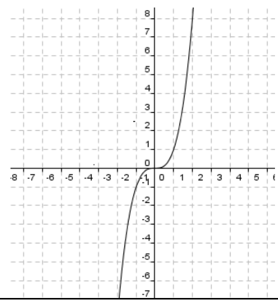
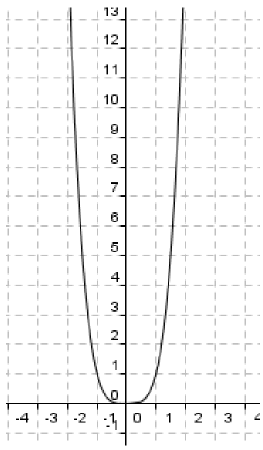
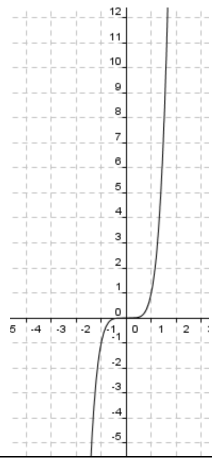
Aufgabe 5 *(Westermann EK, S.47)*

Aufgabe 6 *(Westermann EK, S.47)*

XII. Parabeln mit den Gleichungen $y = ax^n$; $n \geq 2$

XII.1. Graphischer Vergleich zwischen Parabeln mit geraden und ungeradem Exponenten (letzterer grösser als 2):

Beispiele:

$y = ax^n$ *$n = 2, 4, 6, 8$ $a=1$*	**$y = ax^n$** *$n = 3, 5, 7, 9, \dots$ $a=1$*
$y = x^2$ 	$y = x^3$ 
$y = x^4$ 	$y = x^5$ 

KUBISCHE PARABELN = alle Parabeln $\boxed{y = ax^{2n+1}}$ n = 1, 2, 3, ….

Bsp. :

- $y = x^3$
- $y = x^5$, …
- …. → x mit ungerader Exponent der grösser als 2 ist

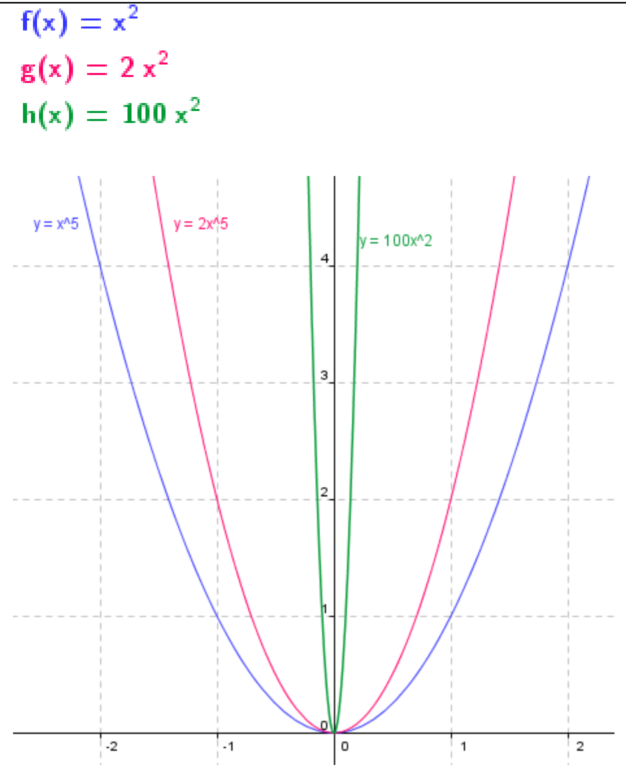
Feststellung:

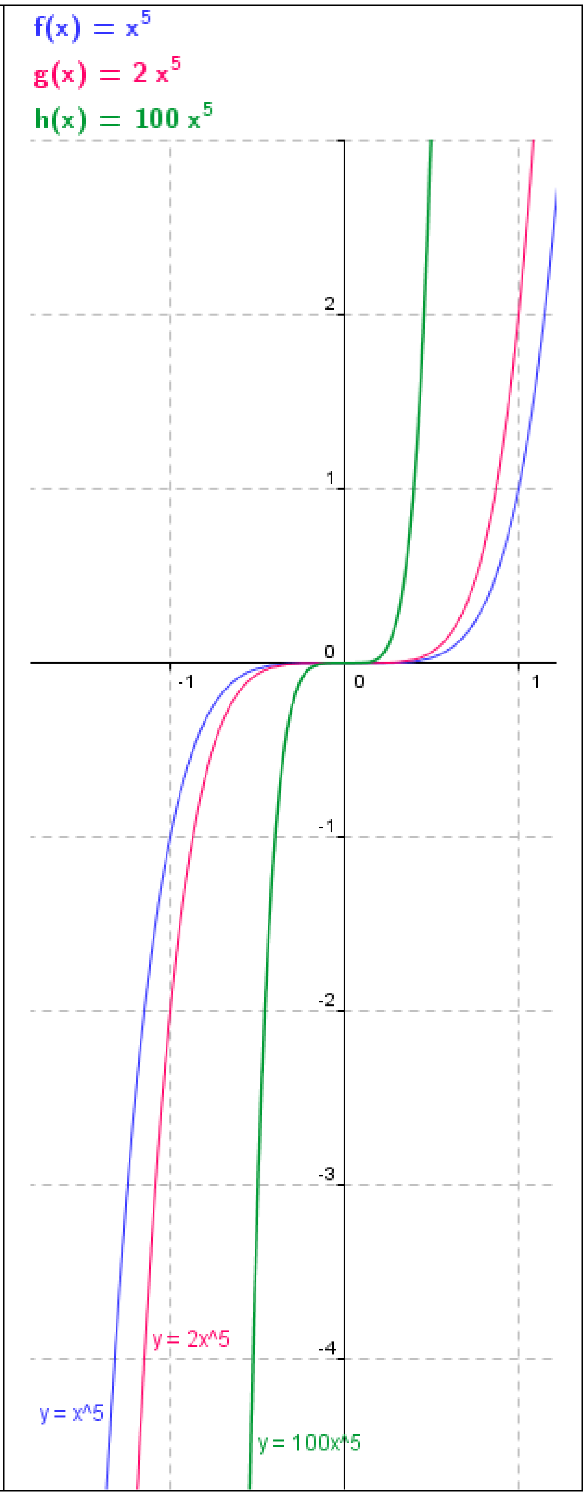
$\boxed{y = ax^{2n}}$ (gerader Exponent): Die Parabel verläuft symmetrisch zu einer x-Achse

$\boxed{y = ax^{2n+1}}$ (ungerader Exponent): Die Parabel verläuft punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung (Spiegelung am Koordinatenursprung)

XII.2. Einfluss von der Variabel ‚a‘ auf den Kurvenverlauf:

Beispiele:





Feststellung:

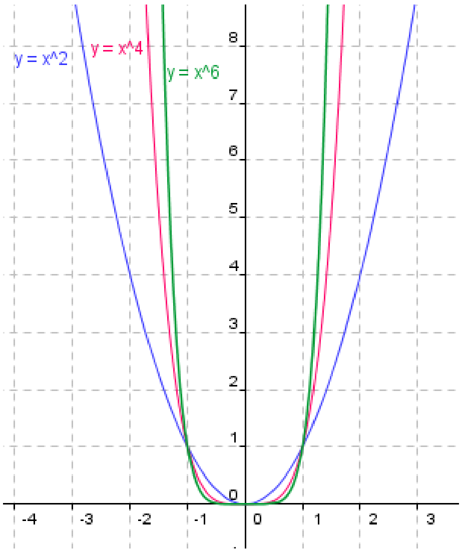
Desto grösser der Wert von ‚a‘ ist, desto ___________________ stellen sich die Parabeln dar.

XII.3. Einfluss des numerischen Wertes des Exponenten auf den Kurvenverlauf:

$f(x) = x^2$

$g(x) = x^4$

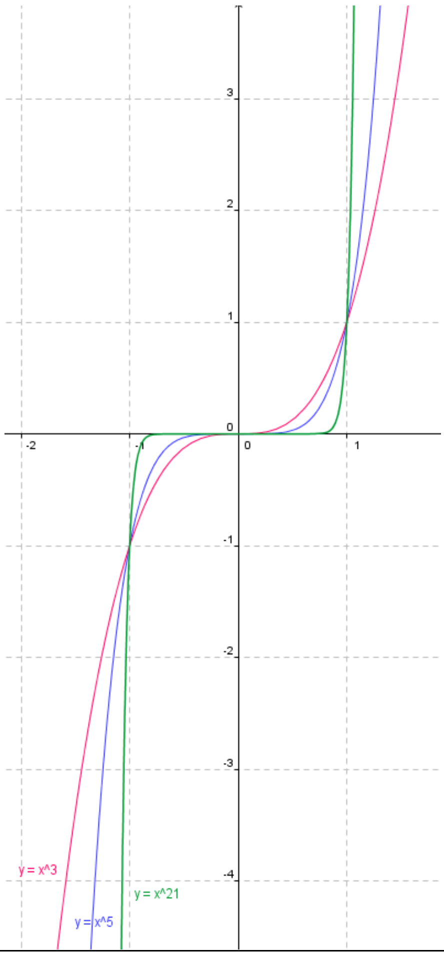
$h(x) = x^6$



$f(x) = x^5$

$g(x) = x^3$

$h(x) = x^{21}$

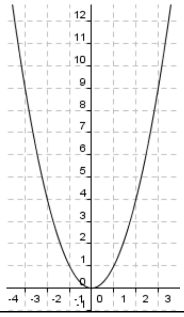
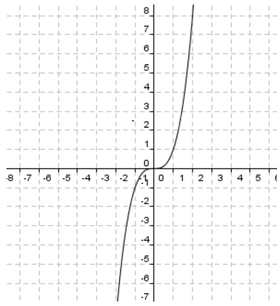


Feststellung:

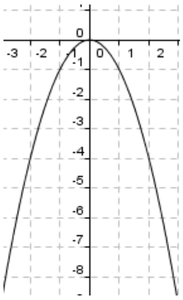
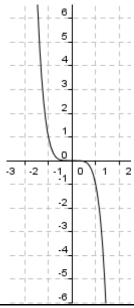
Desto grösser der Wert von ‚n' ist, desto ___________________ stellen sich die Parabeln dar.

XII.4. Einfluss des Vorzeichen von ‚a‘ auf den Kurvenverlauf:

Wenn $a > 0$:

$y = 2x^2$	$y = 2x^3$
	

Wenn $a < 0$:

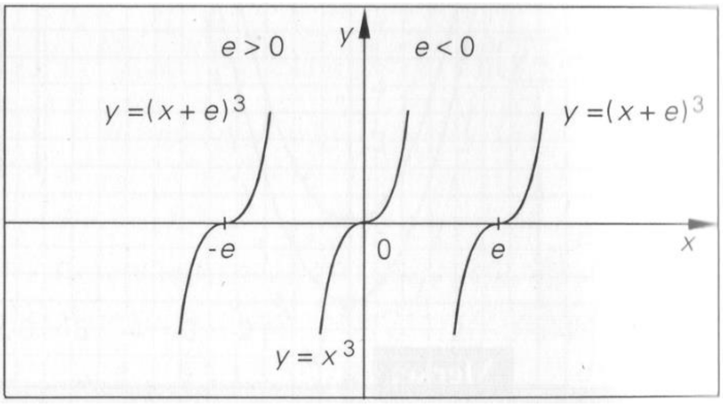
$y = -2x^2$	$y = -2x^3$
	

Feststellung:

XII.5. Verschieben der kubischen Parabeln:

X.5.1. Verschiebung auf der x-Achse:

Beispiel: f(x) = (x **+ e**)^3



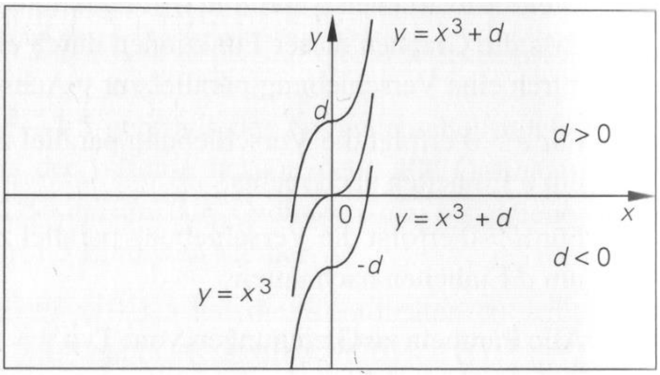
Feststellung:

Verschieben von ‚***e***‘-Einheiten auf der x-Achse

- nach **rechts**, wenn **e < 0**;
- nach **links**, wenn **e > 0**

X.5.2. Verschiebung auf der y-Achse:

Beispiel: f(x) = x^3 **+ d**



Feststellung:

- Verschieben von ‚***d***‘- Einheiten auf der x-Achse
  - wenn **d < 0**: Der Graph verschiebt sich um *‚d-Einheiten‘* **nach unten**,
  - wenn **d > 0**: Der Graph verschiebt sich um *‚d-Einheiten‘* **nach oben**.

KAPITEL 2: Gleichungen, Ungleichungen und Bruchgleichungen des ersten und zweiten Grades

2.1. Gleichungen des ersten Grades

Aufgabe 1:

Löse folgende Gleichungen des 2. Grades!

1. $16x - 12 = 4\cdot(1 - 2x)$
2. $-5\cdot(2 - 3x) - 6\cdot(2x - 7) = 4\cdot(2x + 5)$
3. $2x - [3x - 2\cdot(5x - 3)] = 5 - [3\cdot(x - 6) + 4]$
4. $1 + \frac{3}{5}\cdot(x - \frac{1}{3}) + \frac{5}{4}\cdot(8x - 1) = -\frac{1}{4}\cdot(\frac{9}{5} + \frac{212}{5}x)$
5. $\frac{7x-3}{4} - \frac{3x+1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{6x+1}{2} = \frac{41}{30}$
6. $\frac{7\cdot(x-1)}{3} + \frac{13}{2} - \frac{11\cdot(x+4)}{6} = \frac{3x+2}{5}$
7. $3 - \frac{2x}{3} = \frac{\frac{x}{3}+1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{3} + \frac{4}{5}\right)$
8. $1 + 9\cdot\frac{x+3}{9} - 2\cdot\frac{3x-1}{6} + \frac{25\cdot(4-x)}{125} = \frac{33\cdot(7-x)}{45}$
9. $3\cdot\frac{x-1}{4} - \frac{4}{3}\cdot(2x+1) - 6x = 1 + \frac{4}{7}\cdot(x-2) - \frac{125}{14} - \frac{713}{84}x$
10. $\frac{55}{3} - \frac{2\cdot(3x-2)}{38} - 5\cdot\frac{18x-36}{95} - 2 + \frac{8x}{76} = 2\cdot\left[16x - \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{18-2x}{2} + 3\right)\right]$

Lösungen:

1. $S = \{ \frac{2}{3} \}$
2. $S = \{ \frac{12}{5} \}$
3. $S = \{ \frac{25}{12} \}$
4. $S = \{ 0 \}$
5. $S = \{ 1 \}$
6. $S = \{ -\frac{107}{3} \}$
7. $S = \{ \frac{87}{20} \}$
8. $S = \{ 0 \}$
9. $S = \varnothing$
10. $S = \{ 1 \}$

2.2. Gleichungen des zweiten Grades

Aufgabe 2:
Löse folgende Gleichungen des 2. Grades!

1. $4\cdot(x-1)\cdot(x+1)+2\cdot(1-x)^2-(2x+1)\cdot(3x-2)=0$
2. $(x-3)\cdot(2x+1)+(4x-2)\cdot(3x-9)-2x+6=0$
3. $5x\cdot(1-2x)+(4x+1)\cdot(2x+18)-79x=0$
4. $(x-3)^2+3\cdot(x+1)\cdot(x-1)+3\cdot(1+6x)=0$
5. $x^2-2x-15=0$
6. $2x^2+5x-3=0$
7. $(2x-3)^3-(2x-3)=0$
8. $\left(3-\frac{x}{2}\right)^2-3\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{x^2}{12}$

Lösungen:

1) S= $\{0\}$
2) S= $\left\{\frac{1}{2};3\right\}$
3) S= $\{-3;3\}$
4) S= $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$
5) S= $\{-3;5\}$
6) S= $\left\{-3;\ \frac{1}{2}\right\}$
7) S= $\left\{\frac{3}{2};1;2\right\}$
8) S= $\left\{\frac{29}{16}\right\}$

Aufgabe 3:

Löse folgende Gleichungen des 2. Grades!

1. $6\cdot(x^2 + 2) - 5x\cdot(x - 1) - (11x + 3) = 0$
2. $-6\cdot(x + 1)\cdot(1 - x)^2 + 5x\cdot(x + 2)\cdot(x - 1) + 2\cdot(x + 11)\cdot(1 - x) = 0$
3. $(2 - x)^2 - 4\cdot(-4 - 3x)^2 = 0$
4. $2x^3 = 8x$
5. $(3 - 2x)^3 + 9\cdot(2x - 3)\cdot x^2 = 0$
6. $(\frac{7x}{4} + 4)^2 - (\frac{x}{4} + 8)^2 - (2x - 3)\cdot(2x + 3) + (x + 5)^2 = 0$
7. $\frac{9}{5}(x - 5)^2 - (x + 3)^2 = \frac{4}{5}\cdot(5 + x)^2$
8. $x^6 + 16x^4 = 8x^5$
9. $(2x^2 - 5x + 8)^2 = (x^2 + 3x - 8)^2$
10. $x^2 + 14x = -33$
11. $3x^2 - 8x + 4 = 0$
12. $5x^2 - 3x = 2$
13. $7x^2 + 10x = 8$
14. $(1 - x)\cdot(3x - 4) - (5 + 2x)\cdot(2 - x) = 8x - x^2 - 14$
15. $(4x - 1)\cdot(-2x - 3) + (1 - 4x)\cdot(3x + 2) + (4x)^2 - 1 = 0$
16. $(-3x - 1) + 2x\cdot(3x + 1) - (2 - 18x^2) = 0$
17. $x^3 = 4x^2 - 4x$
18. $x^3 - 8 - 2x\cdot(2 - x) = 0$
19. $12x^2 + 24x^3 = -2x - 16x^4$
20. $(x^2 - 4)\cdot(x - 1)\cdot(x^2 + x + 1) - x^3 + 4x - (x + 1)\cdot(x - 2)\cdot(2 + x)\cdot(x^2 - x + 1) = 0$

Lösungen:

1. $S = \{ 3 \}$
2. $S = \{ 1 ; 4 \}$
3. $S = \{ -2 ; -\frac{6}{7} \}$
4. $S = \{ -2 ; 0 ; 2 \}$
5. $S = \{ -3 ; \frac{3}{5} ; \frac{3}{2} \}$
6. $S = \{ \frac{7}{10} \}$
7. $S = \{ \frac{1}{2} \}$
8. $S = \{ 0 ; 4 \}$
9. $S = \{ 0 ; \frac{2}{3} ; 4 \}$
10. $S = \{ -3 ; -11 \}$
11. $S = \{ 2 ; \frac{2}{3} \}$
12. $S = \{ -\frac{2}{5} ; 1 \}$
13. $S = \{ -2 ; \frac{4}{7} \}$
14. $S = \mathbb{R}$
15. $S = \{ -4 ; \frac{1}{4} \}$
16. $S = \{ -\frac{1}{3} ; \frac{3}{8}]$
17. $S = \{ 0 ; 2 \}$
18. $S = \{ -2 ; 2 \}$
19. $S = \{ -\frac{1}{2} ; 0 \}$
20. $S = \{ -2 ; 2 \}$

2.3. Ungleichungen des ersten Grades

Aufgabe 4:

Löse folgende Ungleichungen des 1. Grades!

1. $-3x - 2 \geq -14$
2. $4 + x \geq 1 - 3x$
3. $-\frac{x}{2} + 4 < \frac{x}{3} - 1$
4. $\frac{1}{3} - x \geq 2 + \frac{x}{2}$
5. $\frac{3x+1}{5} < \frac{2x-1}{3}$
6. $\frac{x-3}{3} - \frac{4+x}{4} \leq 3\cdot(1 - x) + \frac{37x-48}{12}$
7. $4\cdot(x - 2) + 3\cdot\frac{x-1}{4} > -x - \frac{35}{4}$
8. $\frac{2x+5}{10} - \frac{x+3}{6} \leq \frac{x}{30}$
9. $\frac{x}{7} - \frac{2\cdot(x+3)}{21} \leq x - 1$
10. $\frac{1}{3}\cdot\left(2x - \frac{1+x}{5}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{2+x}{3}\right) \leq \frac{x-4}{6} + \frac{3x}{5}$

Lösung:

1. $-3x - 2 \geq -14 \Leftrightarrow -3x \geq -14 + 2 \Leftrightarrow -3x \geq -12 \Leftrightarrow x \leq 4$

   $S =]-\infty\ ;\ 4]$

2. $4 + x \geq 1 - 3x \Leftrightarrow x + 3x \geq 1 - 4 \Leftrightarrow 4x \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{4}$

   $S = [-\frac{3}{4}\ ;\ +\infty[$

3. $-\frac{x}{2} + 4 < \frac{x}{3} - 1 \Leftrightarrow -\frac{x}{2} - \frac{x}{3} < -1 - 4 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{3} > 1 + 4 \Leftrightarrow \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} > 5$

   $\Leftrightarrow 3x + 2x > 30 \Leftrightarrow 5x > 30 \Leftrightarrow x > 6$

   $S =]6\ ;\ +\infty[$

4. $\frac{1}{3} - x \geq 2 + \frac{x}{2} \Leftrightarrow -x - \frac{x}{2} \geq 2 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{3x}{2} \geq \frac{5}{3} \Leftrightarrow -\frac{9x}{6} \geq \frac{10}{6} \Leftrightarrow -9x \geq 10$

   $\Leftrightarrow x \leq -\frac{10}{9}$ **$S =]-\infty\ ;\ -\frac{10}{9}]$**

5. $\frac{3x+1}{5} < \frac{2x-1}{3} \Leftrightarrow \frac{3\cdot(3x+1)}{15} < \frac{5\cdot(2x-1)}{15} \Leftrightarrow 3\cdot(3x + 1) < 5\cdot(2x - 1)$

   $\Leftrightarrow 9x + 3 < 10x - 5 \Leftrightarrow 9x - 10x < -5 - 3 \Leftrightarrow -x < -8 \Leftrightarrow x > 8$

   $S =]8\ ;\ +\infty[$

6. $\frac{x-3}{3} - \frac{4+x}{4} \leq 3\cdot(1 - x) + \frac{37x-48}{12}$

   $\Leftrightarrow \frac{4\cdot(x-3)}{12} - \frac{3\cdot(4+x)}{12} \leq \frac{36\cdot(1-x)}{12} + \frac{37x-48}{12}$

   $\Leftrightarrow 4\cdot(x - 3) - 3\cdot(4 + x) \leq 36\cdot(1 - x) + 37x - 48$

   $\Leftrightarrow 4x - 12 - 12 - 3x \leq 36 - 36x + 37x - 48$

   $\Leftrightarrow x - 24 \leq x - 12 \Leftrightarrow x - x \leq -12 + 24 \Leftrightarrow 0x \leq 12$ **unendlich viele Lösungen**

   $S = \mathbb{R}$

7. $4\cdot(x - 2) + 3\cdot\frac{x-1}{4} > -x - \frac{35}{4} \Leftrightarrow \frac{16\cdot(x-2)}{4} + \frac{3\cdot(x-1)}{4} > \frac{-4x}{4} - \frac{35}{4}$

   $\Leftrightarrow 16\cdot(x - 2) + 3\cdot(x - 1) > -4x - 35 \Leftrightarrow 16x - 32 + 3x - 3 > -4x - 35$

   $\Leftrightarrow 19x - 35 > -4x - 35 \Leftrightarrow 19x + 4x > -35 + 35 \Leftrightarrow 23x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

   $S =]0\ ;\ +\infty[$

8. $\frac{2x+5}{10} - \frac{x+3}{6} \leq \frac{x}{30} \Leftrightarrow \frac{6\cdot(2x+5)}{60} - \frac{10\cdot(x+3)}{60} \leq \frac{2x}{60}$

   $\Leftrightarrow 6\cdot(2x + 5) - 10\cdot(x + 3) \leq 2x \Leftrightarrow 12x + 30 - 10x - 30 \leq 2x$

   $\Leftrightarrow 2x \leq 2x \Leftrightarrow 2x - 2x \leq 0 \Leftrightarrow 0x \leq 0$ **unendlich viele Lösungen**

   $S = \mathbb{R}$

9. $\frac{x}{7} - \frac{2\cdot(x+3)}{21} \leq x - 1 \Leftrightarrow \frac{3x}{21} - \frac{2\cdot(x+3)}{21} \leq \frac{21\cdot(x-1)}{21}$

$\Leftrightarrow 3x - 2\cdot(x + 3) \leq 21\cdot(x - 1) \Leftrightarrow 3x - 2x - 6 \leq 21x - 21$

$\Leftrightarrow 3x - 2x - 21x \leq -21 + 6 \Leftrightarrow -20x \leq -15 \Leftrightarrow x \geq \frac{15}{20} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{4}$

S = [$\frac{3}{4}$; +∞[

10. $\frac{1}{3}\cdot\left(2x - \frac{1+x}{5}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{2+x}{3}\right) \leq \frac{x-4}{6} + \frac{3x}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{1+x}{15} - \frac{1}{2} + \frac{2+x}{6} \leq \frac{x-4}{6} + \frac{3x}{5}$

$\Leftrightarrow 20x - 2\cdot(1 + x) - 15 + 5\cdot(2 + x) \leq 5\cdot(x - 4) + 18x$

$\Leftrightarrow 20x - 2 - 2x - 15 + 10 + 5x \leq 5x - 20 + 18x$

$\Leftrightarrow 23x - 7 \leq 23x - 20$

$\Leftrightarrow 23x - 23x \leq -20 + 7 \Leftrightarrow 0x \leq -13$ **keine Lösung**

S = ∅

2.3. Ungleichungen des zweiten Grades

Beispiel:

$$9\cdot(x-3)^2 - 4\cdot(1-2x)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow [3\cdot(x-3)]^2 - [2\cdot(1-2x]^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow [3\cdot(x-3) + 2\cdot(1-2x)]\cdot[3\cdot(x-3) - 2\cdot(1-2x)] \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (3x - 9 + 2 - 4x)\cdot(3x - 9 - 2 + 4x) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (-x - 7)\cdot(7x - 11) \geq 0$$

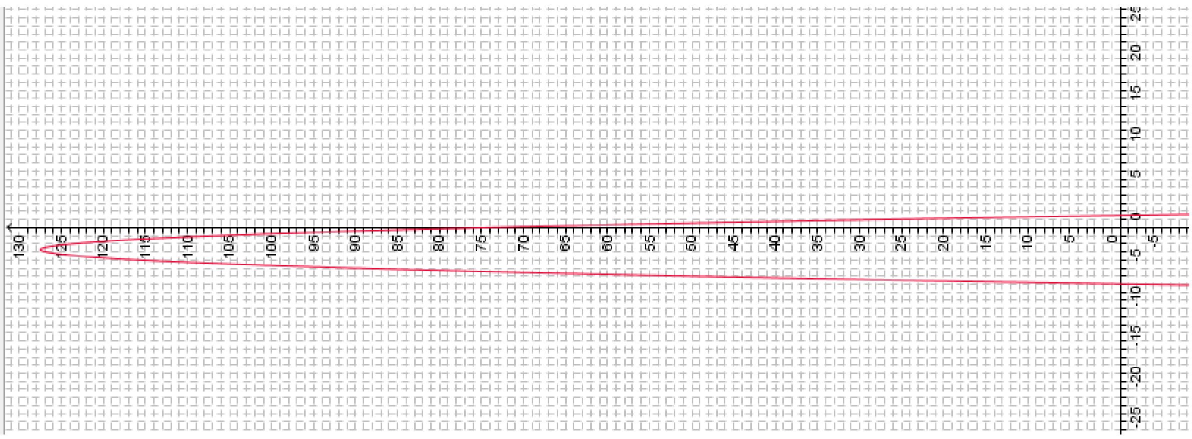
Null-Ergebnis wenn:

- $-x - 7 = 0 \Leftrightarrow -x = 7 \Leftrightarrow x = \mathbf{-7}$
- $7x - 11 = 0 \Leftrightarrow 7x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{7}$

Verlauftabelle:

x	$-\infty$		-7		$\frac{11}{7}$		$+\infty$
$-x - 7$		+	0	−		−	
$7x - 11$		−		−	0	+	
$(-x - 7)\cdot(7x - 11)$		−	0	+	0	−	

Graphischer Kurververlauf:



$$S = [-7\ ;\ \frac{11}{7}]$$

Aufgabe 5:

Löse folgende Ungleichungen des 2. Grades!

1. $(2 - 3x)\cdot(4x + 7) > 0$
2. $(x + 1)\cdot(x + 2)\cdot(x - 3) \leq 0$
3. $(1 - 2x)\cdot(3 + 2x)\cdot(1 - x) > 0$
4. $(x + 4)^2 - (3x - 1)^2 < 0$
5. $(4x + 1)^2 \leq (2x + 3)\cdot(-3 + 2x)$
6. $(3 - x)^2 > (2 + x)^2$
7. $x\cdot(x - 0,5) \leq x\cdot(x - 0,5)^2$
8. $(x + 5)^2 + 11 \geq (x + 3)^2$
9. $(3x + 2)\cdot(2x - 1) < (2x - 1)\cdot(x + 1) + (2x + 1)^2$
10. $9\cdot(x - 1) + (1 - x)^3 > 0$
11. $x\cdot(1 - 2x) \geq 0$
12. $5x^2 + x^3 \leq 0$
13. $36\cdot(1 - 3x)^2 - (2x + 1)^2 < 0$
14. $(-x - 4)^2 + 2\cdot(x + 3)\cdot(-x - 3) \leq (1 + x)\cdot(1 - x)$
15. $-x^2 + 8x - 12 > 0$
16. $25\cdot(-1 + 2x)^2 - (-x - 1)^2 \geq 0$
17. $-x^4 - 2x^3 + 15x^2 \leq 0$
18. $(-x^2 - 2x + 3)\cdot(x^2 + x + \frac{1}{4}) \leq 0$
19. $(1 - x)\cdot(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) > 0$
20. $x^2 - 6x^3 + 12x^4 - 8x^5 \leq 0$

1. $S =]-\frac{7}{4} ; \frac{2}{3}[$

2. $S =]-\infty ; -2] \cup [-1 ; 3]$

3. $S =]-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}[\cup]1 ; +\infty[$

4. $S =]-\infty ; -\frac{3}{4}[\cup]\frac{5}{2} ; +\infty[$

5. $S = \varnothing$

6. $S =]-\infty ; \frac{1}{2}[$

7. $S = [0 ; 0{,}5] \cup [1{,}5 ; +\infty[$

8. $S = [-\frac{27}{4} ; +\infty[$

9. $S =]-\frac{1}{2} ; +\infty[$

10. $S =]-\infty ; -2[\cup]1 ; 4[$

11. $S = [0 ; \frac{1}{2}]$

12. $S =]-\infty ; -5] \cup \{ 0 \}$

13. $S =]\frac{1}{4} ; \frac{7}{16}[$

14. $S = [-\frac{3}{4} ; +\infty[$

15. $S =]2 ; 6[$

16. $S =]-\infty ; \frac{4}{11}] \cup [\frac{2}{3} ; +\infty[$

17. $S =]-\infty ; -5] \cup \{ 0 \} \cup [3 ; +\infty[$

18. $S =]-\infty ; -3] \cup \{ -\frac{1}{2} \} \cup [1 ; +\infty[$

19. $S =]-1 ; 1[$

20. $S = \{ 0 \} \cup [\frac{1}{2} ; +\infty[$

2.4. Bruchgleichungen

Aufgabe 6:

Löse folgende Bruchgleichungen!

1. $\frac{4}{x} = x$
2. $-\frac{3}{x} = x$
3. $\frac{4}{(3-x)\cdot(1-x)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{x+3}{x-3}$
4. $-2 = \frac{5}{x-3} + \frac{3}{x-1}$
5. $\frac{x+1}{x-3} = \frac{x+4}{x-2}$
6. $\frac{x-2}{2x-1} - \frac{3x-1}{x-3} = 0$
7. $\frac{9}{(3-x)\cdot(x-1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{x+3}{x-3}$
8. $\frac{x-1}{x+3} - 3 = \frac{16}{(x-1)\cdot(x+3)} + \frac{2x+5}{1-x}$
9. $\frac{3x}{2x\cdot(x+1)} - 2\cdot\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) + \frac{x}{x-x^3} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x}$
10. $\frac{7}{1-x} = \frac{11x}{x^3+3x^2} - \frac{28}{x^2+2x-3} + \frac{4}{x+3}$

Lösungen:

1. $S = \{-2 ; 2\}$
2. $S = \varnothing$
3. $S = \{-1\}$
4. $S = \{-2 ; 2\}$
5. $S = \{5\}$
6. $S = \{-1 ; 1\}$
7. $S = \{-4 ; 0\}$
8. $S = \varnothing$
9. $S = \varnothing$
10. $S = \{-1\}$

Aufgabe 7:

1. $\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x}$
2. $\frac{3x}{x\cdot(x-1)} - \frac{4x-1}{x+1} = \frac{2x^2+10}{2x^2-2} - 5$
3. $\frac{x+5}{(x+3)\cdot(x-1)} - \frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{x-1}$
4. $\frac{3x}{3x+3} - \frac{5}{2} = \frac{x+1}{-x}$
5. $\frac{3}{3x-18} - \frac{2x}{4x^2-x^3} = \frac{-2}{(4-x)\cdot(12-2x)}$

Lösung :

1. *Conditions d'existence :* $\begin{cases} x \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Pour $x \in I\!R$ - { 0 ; 1 }:

$$\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)} - \frac{x^2}{x\cdot(x-1)} = \frac{x-1}{x\cdot(x-1)}$$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 - x^2 = x - 1 \Leftrightarrow 0 = x \Leftrightarrow x = 0$ [à exclure]

S $= \varnothing$

2. *Conditions d'existence :* $\begin{cases} x\cdot(x-1) \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ 2\cdot(x^2-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Pour $x \in I\!R$ - { -1 ; 0 ; 1 }:

$$\frac{3x}{x\cdot(x-1)} - \frac{4x-1}{x+1} = \frac{2x^2+10}{2x^2-2} - 5 \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} - \frac{4x-1}{x+1} = \frac{x^2+5}{(x+1)\cdot(x-1)} - 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)} - \frac{(4x-1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{x^2+5}{(x+1)\cdot(x-1)} - \frac{5\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}$$

$\Leftrightarrow 3x + 3 - (4x^2 - 4x - x + 1) = x^2 + 5 - 5\cdot(x^2 - 1)$

$\Leftrightarrow 3x + 3 - 4x^2 + 4x + x - 1 = x^2 + 5 - 5x^2 + 5 \Leftrightarrow 8x + 2 = 10 \Leftrightarrow 8x = 8 \quad |\cdot\frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow x = 1$ [à exclure] **S** $= \varnothing$

3. *Conditions d'existence :* $\begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Pour $x \in I\!R$ - { -3 ; 1 }:

$$\frac{x+5}{(x+3)\cdot(x-1)} - \frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+5}{(x+3)\cdot(x-1)} - \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x+3)\cdot(x-1)} = \frac{2\cdot(x+3)}{(x-1)\cdot(x+3)}$$

$\Leftrightarrow x + 5 - (x^2 - 1) = 2x + 6 \Leftrightarrow x + 5 - x^2 + 1 = 2x + 6$

$\Leftrightarrow -x^2 + x - 2x = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x = 0 \Leftrightarrow -x\cdot(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ou \\ x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ou \\ x = -1 \end{cases}$ **S = { -1 ; 0 }**

4. *Conditions d'existence :* $\begin{cases} 3\cdot(x+1) \neq 0 \\ -x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Pour $x \in I\!R$ - { -1 ; 0 }:

$$\frac{3x}{3x+3} - \frac{5}{2} = \frac{x+1}{-x} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{2x\cdot(x+1)} - \frac{5x\cdot(x+1)}{2x\cdot(x+1)} = -\frac{2\cdot(x+1)^2}{2x\cdot(x+1)} \quad |\cdot 2x\cdot(x+1)$$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x\cdot(x + 1) = -2\cdot(x + 1)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x^2 - 5x + 2\cdot(x^2 + 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x^2 - 5x + 2x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \quad |\cdot(-1)$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} = 0$

$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2})\cdot(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)\cdot(x - 1) = 0$ ... **S = { -2 ; 1 }**

5. *Conditions d'existence :* $\begin{cases} 3\cdot(x-6)\neq 0 \\ x^2\cdot(4-x)\neq 0 \\ (4-x)\cdot 2\cdot(6-x)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 6 \\ x\neq 0 \\ x\neq 4 \end{cases}$

Pour $x \in \mathbb{R} - \{0\,;4\,;6\}$:

$$\frac{3}{3x-18}-\frac{2x}{4x^2-x^3}=\frac{-2}{(4-x)\cdot(12-2x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{3\cdot(x-6)}-\frac{2x}{x^2\cdot(4-x)}=\frac{-2}{(4-x)\cdot 2\cdot(6-x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-6}-\frac{2}{x\cdot(4-x)}=\frac{-1}{(4-x)\cdot(6-x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\cdot(4-x)}{x\cdot(4-x)\cdot(x-6)}-\frac{2\cdot(x-6)}{x\cdot(4-x)\cdot(x-6)}=\frac{x}{x\cdot(4-x)\cdot(x-6)} \quad \Big|\cdot x\cdot(4-x)\cdot(x-6)$$

$\Leftrightarrow x\cdot(4-x)-2\cdot(x-6)=x \Leftrightarrow 4x-x^2-2x+12=x \Leftrightarrow -x^2+x+12=0 \quad |\cdot(-1)$

$\Leftrightarrow x^2-x-12=0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-\frac{48}{4}=0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2-\frac{49}{4}=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{1}{2}+\frac{7}{2})\cdot(x-\frac{1}{2}-\frac{7}{2})=0 \Leftrightarrow (x+3)\cdot(x-4)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ \text{ou} \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ \text{ou} \\ x=4 \quad [\text{ à exclure }] \end{cases}$$

S = { -3 }

2.4. Bruchungleichungen

Aufgabe 7:

1. $\frac{1}{x} \geq x$
2. $\frac{3}{x} > 6$
3. $\frac{2}{x-2} \geq \frac{1}{x-1}$
4. $\frac{3x+1}{x-2} > \frac{x-2}{3x+1}$
5. $\frac{x-1}{x+2} \geq \frac{x-2}{x+1}$
6. $\frac{3}{x} - \frac{2}{1-x} \leq 0$
7. $\frac{1-x}{1+x} + \frac{2-x}{3-x} < 0$
8. $\frac{3}{1-x} + \frac{4x}{x+x^2} < \frac{3x}{x^2-1}$
9. $\frac{2x-3}{(x-2)\cdot(x-1)} - \frac{1}{x-2} < -\frac{1}{1-x}$
10. $\frac{x-2}{x+3} - 4 < -\frac{3x+2}{x-1}$

Lösungen:

1. *Conditions d'existence :* $x \neq 0$

Pour $x \in I\!R^*$ *:*

$$\frac{1}{x} \geq x \Leftrightarrow \frac{1}{x} - x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1+x)\cdot(1-x)}{x} \geq 0$$

Valeurs critiques : -1, 0 *et* 1

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		(a = 1)
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		(a = -1)
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		(a = 1)
$\frac{(1+x)\cdot(1-x)}{x}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$		

S =]-∞ ; -1] ∪]0 ; 1]

2. *Conditions d'existence :* $x \neq 0$

Pour $x \in I\!R^*$ *:*

$$\frac{3}{x} > 6 \Leftrightarrow \frac{3}{x} - 6 > 0 \Leftrightarrow \frac{3-6x}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{3\cdot(1-2x)}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} > 0$$

Valeurs critiques : 0 *et* $\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$	
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$		(a = -2)
x		$-$	0	$+$		$+$		(a = 1)
$\frac{1-2x}{x}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$		

S =]0 ; $\frac{1}{2}$[

3. *Conditions d'existence :* $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Pour $x \in \mathbb{R} - \{1\,;2\}$:

$$\frac{2}{x-2} \geq \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\cdot(x-1)-1\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x-1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-2-x+2}{(x-2)\cdot(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(x-2)\cdot(x-1)} \geq 0$$

Valeurs critiques : **0**, 1 *et* 2

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$	
x	−	0	+	|	+	|	+	(a = 1)
x - 2	−	|	−	|	−	0	+	(a = 1)
x - 1	−	|	−	0	+	|	+	(a = 1)
$\frac{x}{(x-2)\cdot(x-1)}$	−	0	+	||	−	||	+	

S = [0 ; 1[∪]2 ; +∞[

4. *Conditions d'existence :* $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -\frac{1}{3} \end{cases}$

Pour $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{3}\,;2\}$:

$$\frac{3x+1}{x-2} > \frac{x-2}{3x+1} \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-2} - \frac{x-2}{3x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(3x+1)^2-(x-2)^2}{(x-2)\cdot(3x+1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{[(3x+1)+(x-2)]\cdot[(3x+1)-(x-2)]}{(x-2)\cdot(3x+1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(4x-1)\cdot(2x+3)}{(x-2)\cdot(3x+1)} > 0$$

Valeurs critiques : $\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{2}$, 2 *et* $-^1/_3$

On a : $-\frac{3}{2} < -\frac{1}{3} < \frac{1}{4} < 2$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$		2	$+\infty$	
4x - 1	−	|	−	|	−	0	+	|	+	(a = 4)
2x + 3	−	0	+	|	+	|	+	|	+	(a = 2)
x - 2	−	|	−	|	−	|	−	0	+	(a = 1)
3x + 1	−	|	−	0	+	|	+	|	+	(a = 3)
$\frac{(4x-1)\cdot(2x+3)}{(x-2)\cdot(3x+1)}$	+	0	−	||	+	0	−	||	+	

S =]-∞ ; $-\frac{3}{2}$[∪]$-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$[∪]2 ; +∞[

5. *Conditions d'existence :* $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Pour $x \in I\!R$ - { -2 ; -1 }:

$$\frac{x-1}{x+2} \geq \frac{x-2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)\cdot(x+1)-(x-2)\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-1)-(x^2-4)}{(x+2)\cdot(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1-x^2+4}{(x+2)\cdot(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{(x+2)\cdot(x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+2)\cdot(x+1)} \geq 0$$

Valeurs critiques : -2 et -1

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		(a = 1)
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		(a = 1)
$\frac{1}{(x+2)\cdot(x+1)}$		$+$	‖	$-$	‖	$+$		

S =]-∞ ; -2[∪]-1 ; +∞[

6. *Conditions d'existence :* $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Pour $x \in I\!R$ - { 0 ; 1 }:

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3\cdot(1-x)-2x}{x\cdot(1-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3-3x-2x}{x\cdot(1-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-5x+3}{x\cdot(1-x)} \leq 0$$

Valeurs critiques : $\frac{3}{5}$, 0 et 1

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		1		$+\infty$	
$-5x+3$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		(a = -5)
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$		(a = 1)
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		(a = -1)
$\frac{-5x+3}{x\cdot(1-x)}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$		

S =]-∞ ; 0[∪ [$\frac{3}{5}$; 1[

7. *Conditions d'existence :* $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$

Pour $x \in I\!R$ - { -1 ; 3 }:

$$\frac{1-x}{1+x} + \frac{2-x}{3-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)\cdot(3-x)+(2-x)\cdot(1+x)}{(1+x)\cdot(3-x)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3-x-3x+x^2)+(2+2x-x-x^2)}{(1+x)\cdot(3-x)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-4x+x^2+2+x-x^2}{(1+x)\cdot(3-x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+5}{(1+x)\cdot(3-x)} < 0$$

Valeurs critiques : $\frac{5}{3}$, -1 *et* 3

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		3		$+\infty$	
$-3x+5$		+		+	0	−		−		(a = -3)
$x+1$		−	0	+		+		+		(a = 1)
$-x+3$		+		+		+	0	−		(a = -1)
$\frac{-3x+5}{(x+1)\cdot(3-x)}$		−	‖	+	0	−	‖	+		

S =]-∞ ; -1[∪]$\frac{5}{3}$; 3[

8. *Conditions d'existence :* $\begin{cases} 1-x \neq 0 \\ x\cdot(1+x) \neq 0 \\ (x+1)\cdot(x-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Pour $x \in \mathbb{R}$ - { -1 ; 0 ; 1 }:

$$\frac{3}{1-x} + \frac{4x}{x+x^2} < \frac{3x}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{-3}{x-1} + \frac{4x}{x\cdot(1+x)} - \frac{3x}{(x+1)\cdot(x-1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3\cdot(x+1)+4\cdot(x-1)-3x}{(x+1)\cdot(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3x-3+4x-4-3x}{(x+1)\cdot(x-1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x-7}{(x+1)\cdot(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+7}{(x+1)\cdot(x-1)} > 0$$

Valeurs critiques : $-\frac{7}{2}$, -1 *et* 1

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		-1		1		$+\infty$	
$2x+7$		−	0	+		+		+		(a = 2)
$x+1$		−		−	0	+		+		(a = 1)
$x-1$		−		−		−	0	+		(a = 1)
$\frac{2x+7}{(x+1)\cdot(x-1)}$		−	0	+	‖	−	‖	+		

S =]-$\frac{7}{2}$; -1[∪]1 ; +∞[

9. *Conditions d'existence :* $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Pour $x \in \mathbb{R} - \{1\,;\,2\}$:

$$\frac{2x-3}{(x-2)\cdot(x-1)} - \frac{1}{x-2} < -\frac{1}{1-x} \Leftrightarrow \frac{2x-3}{(x-2)\cdot(x-1)} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-3)-(x-1)-(x-2)}{(x-2)\cdot(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3-x+1-x+2}{(x-2)\cdot(x-1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{0x}{(x-2)\cdot(x-1)} < 0 \qquad \textit{(inéquation impossible)}$$

S = ∅

10. *Conditions d'existence :* $\begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Pour $x \in \mathbb{R} - \{-3\,;\,1\}$:

$$\frac{x-2}{x+3} - 4 < -\frac{3x+2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+3} - 4 + \frac{3x+2}{x-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)\cdot(x-1)-4\cdot(x+3)\cdot(x-1)+(3x+2)\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x-1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2x+2-4\cdot(x^2-x+3x-3)+(3x^2+9x+2x+6)}{(x+3)\cdot(x-1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2x+2-4x^2-8x+12+3x^2+11x+6}{(x+3)\cdot(x-1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{(x+3)\cdot(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x+3)\cdot(x-1)} < 0$$

Valeurs critiques : -3 et 1

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$	
$x+3$		−	0	+		+		(a = 1)
$x-1$		−		−	0	+		(a = 1)
$\frac{1}{(x+3)\cdot(x-1)}$		+	‖	−	‖	+		

S =]-3 ; 1[

Aufgabe …

1. $\dfrac{16x^2+8x+1}{x^2-1} \geq 0$

2. $2\cdot\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right) - \dfrac{3}{2\cdot(1-x)} < \dfrac{3}{2\cdot(1+x)} + \dfrac{1}{1-x^2}$

3. $\dfrac{\dfrac{2x+1}{x-1}+1}{\dfrac{2x-1}{x+1}-1} \leq 0$

4. $\dfrac{2x}{3-x} \geq \dfrac{1-2x}{x-2}$

5. $\dfrac{5-x}{x-3} \leq \dfrac{x-3}{5-x}$

6. $\dfrac{2+\dfrac{2}{x}}{2-\dfrac{2}{x}} \leq \dfrac{1}{x}$

7. $\dfrac{2}{x+1} < \dfrac{3x+1}{x^2+x}$

8. $\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{14x}{1-x} < -\dfrac{4}{x+1}\cdot\left(\dfrac{1}{x-1}+1\right)$

9. $\dfrac{3x^2}{1-x} - \dfrac{x^2}{x+2} \leq 0$

10. $\dfrac{x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}}{1-x}\cdot\dfrac{x^3-x}{4x^2-4x+1}\cdot\dfrac{4x^2-1}{3x-1} < 0$

1. $S =]-\infty\,;-1[\cup \{-\frac{1}{4}\} \cup]1\,;+\infty[$
2. $S =]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[$
3. $S =]-1\,;0] \cup]1\,;2[$
4. $S =]-\infty\,;1] \cup]2\,;3[$
5. $S =]-\infty\,;3[\cup [4\,,5[$
6. $S =]0\,;1[$
7. $S = \mathbb{R}_+^*$
8. $S =]-\frac{1}{15}\,;1[$
9. $S =]-2\,;-\frac{5}{4}] \cup \{0\} \cup]1\,;+\infty[$